Lezione 15

In questa lezione completeremo la discussione dei metodi ad un punto. Le parti di testo in magenta sono dimostrazioni di asserti *omesse in classe*.

- *Secondo criterio*

  Sia f la funzione della quale si vuole approssimare uno zero, α, e sia $[a, b]$ un intervallo contenente α e sul quale la funzione derivata prima di f è *continua* ed assume sempre valore *diverso da zero*. Sia infine x_k la successione *convergente* ad α generata dal metodo ad un punto scelto per l'approssimazione. Supponiamo che per ogni k sia $x_k \in [a, b]$.[1]

  Si consideri il seguente criterio d'arresto:

  $$\text{dato } \delta > 0: \quad \textit{Se } |\, f(x_k) \,| < \delta \textit{ allora } \text{arresta la costruzione}$$

  - Il criterio è *calcolabile*.
  - Il criterio è *efficace*. Infatti, per la continuità di f si ha:

    $$x_k \to \alpha \qquad \Rightarrow \qquad f(x_k) \to f(\alpha) = 0$$

    Dunque, per ogni $\delta > 0$ la disuguaglianza è certamente soddisfatta dopo un numero finito di iterazioni.
  - Essendo α zero di f si ha:

    $$f(x_k) = f(x_k) - f(\alpha)$$

    Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra x_k ed α tale che:

    $$f(x_k) - f(\alpha) = f'(\theta_k)(x_k - \alpha)$$

    da cui:

    $$f(x_k) = f'(\theta_k)\,(x_k - \alpha)$$

    Poiché $\theta_k \in [a, b]$ allora $f'(\theta_k) \neq 0$, dunque:

    $$|\, x_k - \alpha \,| = \left| \frac{f(x_k)}{f'(\theta_k)} \right|$$

    Il criterio usa $|\, f(x_k) \,|$ per *stimare* l'errore assoluto $|\, x_k - \alpha \,|$ (ed è quindi un criterio *di tipo assoluto*). Inoltre, poiché $\theta_k \to \alpha$, per k grande si ha $f'(\theta_k) \approx f'(\alpha)$. Allora:

    * La stima è tanto *migliore* quanto più $|\, f'(\alpha) \,|$ è *vicino a uno*. In tal caso il criterio d'arresto interrompe la costruzione *appena* l'approssimazione è sufficientemente accurata.
    * La stima è tanto *peggiore* quanto:
      - $|\, f'(\alpha) \,|$ è *grande*. In tal caso si ha:

        $$|\, x_k - \alpha \,| = \left| \frac{f(x_k)}{f'(\theta_k)} \right| \ll |\, f(x_k) \,|$$

        e il criterio d'arresto rischia di interrompere la costruzione quando $|\, x_k - \alpha \,| \ll \delta$, ovvero la procedura si accorge *in ritardo* che l'approssimazione è sufficientemente accurata.
      - $|\, f'(\alpha) \,|$ è *vicino a zero*. In tal caso si ha:

        $$|\, x_k - \alpha \,| = \left| \frac{f(x_k)}{f'(\theta_k)} \right| \gg |\, f(x_k) \,|$$

        e il criterio d'arresto rischia di interrompere la costruzione quando $|\, x_k - \alpha \,| \gg \delta$, ovvero quando l'approssimazione *non è* sufficientemente accurata.

[1] Per la convergenza della successione ci si può sempre ricondurre a tale situazione eliminando un opportuno numero di termini iniziali e rinominando i restanti.

- *Uso delle procedure in* $F(\beta, m)$.

  Siano h, $[a,b]$ e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza, ed α il punto unito di h in $[a,b]$. La successione di numeri reali x_k generata dal metodo ad un punto definito da h a partire da $x_0 = \gamma$ è convergente ad α e $x_k \in [a,b]$ per ogni k.

  Si consideri poi un calcolatore che opera con numeri di macchina $F(\beta, m)$ e sia ϕ l'algoritmo scelto per approssimare i valori di h.

  Se:

  (i) esiste un numero reale $\omega \geqslant 0$ tale che per ogni numero di macchina $\xi \in [a,b]$ si ha:
  $$|\,\phi(\xi) - h(\xi)\,| \leqslant \omega$$

  (ii) γ è un numero di macchina e la successione di numeri di macchina ξ_k definita da $\xi_0 = \gamma$, $\xi_{k+1} = \phi(\xi_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ è contenuta nell'intervallo $[a,b]$

  allora:

  (A) per ogni numero di macchina $\xi \in [a,b]$:
  $$|\,\xi - \alpha\,| > \frac{\omega}{1-L} \qquad \Rightarrow \qquad |\,\phi(\xi) - \alpha\,| < |\,\xi - \alpha\,|$$

  (B) per ogni k si ha:
  $$|\,\xi_k - x_k\,| \leqslant \frac{1-L^k}{1-L}\,\omega$$

  (C) per ogni k si ha:
  $$|\,\xi_k - \alpha\,| \leqslant \frac{1-L^k}{1-L}\,\omega + L^k|\,\xi_0 - \alpha\,| = \frac{\omega}{1-L} + L^k\left(|\,\xi_0 - \alpha\,| - \frac{\omega}{1-L}\right)$$

  Infatti, per ogni numero di macchina $\xi \in [a,b]$ si ha:
  $$|\,\phi(\xi) - \alpha\,| \leqslant |\,\phi(\xi) - h(\xi)\,| + |\,h(\xi) - h(\alpha)\,| \leqslant \omega + |\,h(\xi) - h(\alpha)\,|$$

  Per il Teorema di Lagrange esiste un numero reale θ tra ξ ed α tale che:
  $$|\,h(\xi) - h(\alpha)\,| = |\,h'(\theta)\,|\,|\,\xi - \alpha\,|$$

  e quindi, essendo $\theta \in [a,b]$:
  $$|\,h(\xi) - h(\alpha)\,| \leqslant L\,|\,\xi - \alpha\,|$$

  Dunque:
  $$|\,\phi(\xi) - \alpha\,| \leqslant \omega + L\,|\,\xi - \alpha\,|$$

  Siccome:
  $$|\,\xi - \alpha\,| > \frac{\omega}{1-L} \qquad \Rightarrow \qquad \omega < (1-L)|\,\xi - \alpha\,|$$

  si ottiene l'asserto (A).

  Si ha poi:
  $$|\,\xi_k - x_k\,| = |\,\phi(\xi_{k-1}) - h(x_{k-1})\,| \leqslant |\,\phi(\xi_{k-1}) - h(\xi_{k-1})\,| + |\,h(\xi_{k-1}) - h(x_{k-1})\,|$$

  da cui, utilizzando le ipotesi (i) e (ii) ed il Teorema di Lagrange:
  $$|\,\xi_k - x_k\,| \leqslant \omega + L|\,\xi_{k-1} - x_{k-1}\,|$$

  Iterando, e ricordando che $x_0 = \xi_0$ si ottiene:
  $$|\,\xi_k - x_k\,| \leqslant \left(1 + L + \cdots + L^{k-1}\right)\omega = \frac{1-L^k}{1-L}\,\omega$$

  ovvero l'asserto (B).

  L'asserto (C) si ottiene immediatamente dall'asserto (B):
  $$|\,\xi_k - \alpha\,| \leqslant |\,\xi_k - x_k\,| + |\,x_k - \alpha\,| \leqslant \frac{1-L^k}{1-L}\,\omega + L^k|\,\xi_0 - \alpha\,|$$

  Si osservi che:

– L'asserto (A) garantisce che *la successione delle distanze* $|\,\xi_k - \alpha\,|$ *è decrescente finché* ξ_k *non entra nell'intorno chiuso di centro* α *e raggio* $\omega/(1-L)$*, dopodiché nulla si può dire.* In particolare: *non è garantita la convergenza della successione* ξ_k.
– L'asserto (B) afferma che *le successioni* ξ_k *ed* x_k *non sono mai troppo lontane.*
– L'asserto (C) traduce in termini di distanza di ξ_k da α quanto mostrato dall'asserto (A).

Per quanto riguarda l'uso dei Criteri d'arresto in $F(\beta, m)$, la principale differenza con il caso ideale, come già visto per il metodo di bisezione, è che *il criterio può risultare non efficace se l'utilizzatore richiede un'approssimazione troppo accurata.* Si ha infatti:

(D) *Primo criterio.*
La realizzazione del criterio è:

$$\text{dato } \delta > 0: \quad \textit{Se } |\,\xi_{k+1} \ominus \xi_k\,| < \mathrm{rd}(\delta) \textit{ allora } \text{arresta la costruzione}$$

* Il criterio è *calcolabile.*
* Per decidere l'efficacia si studia la successione $|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,|$. Si ha:

$$|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,| \leqslant |\,\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\,| + |\,h(\xi_k) - h(\xi_{k-1})\,| + |\,h(\xi_{k-1}) - \phi(\xi_{k-1})\,|$$

Utilizzando ancora le ipotesi (i) e (ii) ed il Teorema di Lagrange si ottiene:

$$|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,| \leqslant \omega + L\,|\,\xi_k - \xi_{k-1}\,| + \omega = L\,|\,\xi_k - \xi_{k-1}\,| + 2\,\omega$$

Se:

$$|\,\xi_k - \xi_{k-1}\,| > \frac{2\omega}{1-L}$$

allora:

$$|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,| < |\,\xi_k - \xi_{k-1}\,|$$

e, in ogni caso:

$$|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,| \leqslant L^k\,|\,\xi_1 - \xi_0\,| + 2\,\frac{1-L^k}{1-L}\,\omega$$

Se ne deduce che *la successione* $|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,|$ *è decrescente finché:*

$$|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,| > \frac{2\,\omega}{1-L}$$

dopodiché nulla si può dire. Dunque *il criterio può risultare non efficace.* In base alla disuguaglianza ottenuta, una *condizione sufficiente* per l'efficacia del criterio è:

$$\delta > \frac{2\,\omega}{1-L}$$

* Per discutere l'uso di $|\,\xi_{k+1} \ominus \xi_k\,|$ come stima dell'errore assoluto commesso utilizzando ξ_k per approssimare α si cerca una relazione tra $|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,|$ e $|\,\xi_k - \alpha\,|$. Si ha:

$$\xi_{k+1} - \xi_k = \phi(\xi_k) - \xi_k = \big(\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\big) + \big(h(\xi_k) - h(\alpha)\big) + (\alpha - \xi_k)$$

Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra ξ_k e α tale che:

$$\xi_{k+1} - \xi_k = \big(\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\big) + h'(\theta_k)(\xi_k - \alpha) + (\alpha - \xi_k)$$

ovvero:

$$\xi_{k+1} - \xi_k = \big(\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\big) + \big(h'(\theta_k) - 1\big)(\xi_k - \alpha)$$

Dall'ipotesi (ii) si deduce che $\theta_k \in [a, b]$ e quindi $h'(\theta_k) - 1 < 0$. Allora:

$$\xi_k - \alpha = \frac{(\xi_k - \xi_{k+1}) + \big(\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\big)}{1 - h'(\theta_k)}$$

Quando $|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,| > \delta$, tenuto conto della limitazione su δ necessaria per l'efficacia si ha:

$$|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,| > \frac{2\omega}{1-L} > 2\omega$$

Allora, poiché per le ipotesi (i) e (ii) si ha $|\,\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\,| \leqslant \omega$, si approssima:

$$|\,\xi_k - \alpha\,| = \frac{|\,\xi_k - \xi_{k+1} + \big(\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\big)\,|}{1 - h'(\theta_k)} \approx \frac{|\,\xi_{k+1} - \xi_k\,|}{1 - h'(\theta_k)}$$

risultato analogo a quello ottenuto operando in $\mathbb{R}$, e quindi soggetto alle stesse critiche.

(E) *Secondo criterio.*

Sia ψ l'algoritmo scelto per approssimare i valori di f. La realizzazione del criterio è:

$$\text{dato } \delta > 0: \quad \textit{Se } |\,\psi(\xi_k)\,| < \mathrm{rd}(\delta) \ \textit{allora} \text{ arresta la costruzione}$$

Discutiamo la realizzazione del criterio sotto l'ipotesi seguente, analoga alla (i):

(iii) esiste un numero reale $\eta \geqslant 0$ tale che per ogni numero di macchina $\xi \in [a, b]$ si ha:

$$|\,\psi(\xi) - f(\xi)\,| \leqslant \eta$$

Allora:

* Il criterio è *calcolabile.*
* Per decidere l'efficacia si studia la successione $|\,\psi(\xi_k)\,|$.

  Si riscrive:

  $$\psi(\xi_k) = \big(\psi(\xi_k) - f(\xi_k)\big) + \big(f(\xi_k) - f(\alpha)\big)$$

  Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra ξ_k e α tale che:

  $$\psi(\xi_k) = \big(\psi(\xi_k) - f(\xi_k)\big) + f'(\theta_k)(\xi_k - \alpha) \qquad (*)$$

  Utilizzando l'ipotesi (iii) e quanto osservato riguardo all'asserto (A), detto m il massimo valore di $|\,f'(x)\,|$ nell'intorno chiuso di centro α e raggio $\omega/(1 - L)$, per k sufficientemente grande si ottiene:

  $$|\,\psi(\xi_k)\,| \leqslant \eta + m\,\frac{\omega}{1 - L}$$

  e *nulla si può dire sulla convergenza a zero della successione*. Dunque *il criterio può risultare non efficace*. In particolare, supponendo $m \approx |\,f'(\alpha)\,|$, *non è ragionevole aspettarsi di ottenere:*

  $$|\,\psi(\xi_k)\,| < \eta + |\,f'(\alpha)\,|\,\frac{\omega}{1 - L}$$

  È perciò opportuno che l'utilizzatore scelga:

  $$\delta > \eta + |\,f'(\alpha)\,|\,\frac{\omega}{1 - L}$$

* Per discutere l'uso di $|\,\psi(\xi_k)\,|$ come stima dell'errore assoluto commesso utilizzando ξ_k per approssimare α si cerca una relazione tra $|\,\psi(\xi_k)\,|$ e $|\,\xi_k - \alpha\,|$. Per un opportuno numero reale θ_k tra ξ_k e α, ricordando che per ipotesi $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, dalla relazione $(*)$ si ha:

  $$\xi_k - \alpha = \frac{\psi(\xi_k) - \big(\psi(\xi_k) - f(\xi_k)\big)}{f'(\theta_k)}$$

  Quando $|\,\psi(\xi_k)\,| > \delta$, tenuto conto della limitazione su δ suggerita per l'efficacia si ha:

  $$|\,\psi(\xi_k)\,| > \delta > \eta + |\,f'(\alpha)\,|\,\frac{\omega}{1 - L} > \eta$$

  Allora, ricordando l'ipotesi (iii), si approssima:

  $$|\,\xi_k - \alpha\,| = \left|\frac{\psi(\xi_k) - \big(\psi(\xi_k) - f(\xi_k)\big)}{f'(\theta_k)}\right| \approx \left|\frac{\psi(\xi_k)}{f'(\theta_k)}\right|$$

  risultato analogo a quello ottenuto operando in $\mathbb{R}$, e quindi soggetto alle stesse critiche.

- *Esercizio.*

  Si consideri la funzione $h(x) = e^x - 3$.

  - Determinare il numero di punti uniti e separarli.
  - Per ciascuno dei punti uniti decidere se il metodo ad un punto definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo: determinare un punto iniziale a partire dal quale la successione generata dal metodo (operando in $\mathbb{R}$) risulta convergente e discutere la rapidità di convergenza.

  Soluzione: La funzione ha *due* punti uniti: $\alpha_1 \in [-3, 0]$ e $\alpha_2 \in [0, 3]$. Si constata, anche graficamente, che il metodo definito da *h è utilizzabile* per approssimare α_1 ma *non utilizzabile* per approssimare α_2. Una successione convergente ad α_1 si ottiene a partire da $\gamma = -3$. Infine, essendo $h'(\alpha_1) \neq 0$, il metodo risulta avere *ordine di convergenza uno* ad α_1.

Esercizi

---

1. Modificare opportunamente la procedura `MetodoUnPunto` dell'Esercitazione 4 per ottenere una procedura di intestazione:

   ```
   function [x, iter, StimaErr] = MetodoUnPunto(h,x0,tol,Nmax,f)
   ```

   che realizza il metodo ad un punto definito dalla funzione h e che utilizza il secondo criterio d'arresto descritto sopra. Si consideri poi il metodo definito dalla funzione $h(x) = x - e^x + 1$ da utilizzare per approssimare lo zero ($\alpha = 0$) della funzione $f(x) = e^x - 1$. Dopo aver stabilito che (a) il metodo è utilizzabile, (b) ha ordine di convergenza ad α due, e che (c) per ogni $\gamma < 0$ la successione generata dal metodo è convergente ad α e monotona crescente, si utilizzi la procedura realizzata con `tol` $= 10^{-6}$ ed `x0` $= -10$ e si constati che l'ultimo valore restituito approssima lo zero con errore assoluto circa uguale all'ultima componente del vettore `StimaErr`. Infine, si determinino quali componenti del vettore `x` possono essere utilizzate per ottenere un'approssimazione dello zero con errore assoluto minore del valore assegnato a `tol`.