Lezione 14

In questa lezione completiamo la discussione del *Critero d'arresto* per i metodi ad un punto descritto nella lezione precedente (operando in $\mathbb{R}$). Nell'esercitazione vedremo una *realizzazione* in *Scilab* del metodo ad un punto definito da una funzione h ed alcuni esempi di uso.

- *Primo criterio* (seconda parte)

  Si ha:
  $$h(x_k) - x_k = h(x_k) - h(\alpha) + \alpha - x_k$$
  Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra x_k ed α tale che:
  $$h(x_k) - h(\alpha) = h'(\theta_k)(x_k - \alpha)$$
  da cui:
  $$h(x_k) - x_k = \big(h'(\theta_k) - 1\big)(x_k - \alpha)$$
  Poiché $\theta_k \in [a,b]$ allora $h'(\theta_k) < 1$ e $h'(\theta_k) - 1 < 0$. Dunque:
  $$x_k - \alpha = \frac{h(x_k) - x_k}{h'(\theta_k) - 1}$$
  e:
  $$|\, x_k - \alpha \,| = \frac{|\, h(x_k) - x_k \,|}{1 - h'(\theta_k)}$$
  Il criterio usa $|\, h(x_k) - x_k \,|$ per *stimare* l'errore assoluto $|\, x_k - \alpha \,|$ (ed è quindi un criterio *di tipo assoluto*). Inoltre, poiché $\theta_k \to \alpha$, per k grande si ha $h'(\theta_k) \approx h'(\alpha)$.

  - La stima è tanto *migliore* quanto $h'(\alpha)$ è *piccolo*. In particolare la stima è buona quando $h'(\alpha) = 0$, ad esempio per il *Metodo di Newton*. In tal caso si ha anche:
    $$|\, h(x_k) - x_k \,| = \left|\, \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \,\right|$$
  - La stima è tanto *peggiore* quanto $h'(\alpha)$ è *vicino a uno*. Se $h'(x_k) \approx 1$ si ha:
    $$|\, x_k - \alpha \,| = \frac{|\, h(x_k) - x_k \,|}{1 - h'(\theta_k)} \gg |\, h(x_k) - x_k \,|$$
    e il criterio d'arresto rischia di interrompere la costruzione quando $|\, x_k - \alpha \,| \gg \delta$.