Lezione 13

In questa lezione si studia un particolare metodo ad un punto, il *metodo di Newton* e si inizia la discussione dei *Criteri d'arresto* per i metodi in esame.

(C) Metodo di Newton

- *Definizione* (metodo di Newton).

  Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con derivata *prima* continua e per ogni $x \in [a, b]$ sia $f'(x) \neq 0$. Il *metodo di Newton* (*applicato ad* f) è il metodo ad un punto definito dalla funzione:

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- *Proprietà.*

  – I punti uniti di h sono *tutti e soli* gli zeri di f.

  – Siano f con derivata *seconda* continua e α uno zero di f. Si ha:

$$h'(x) = \frac{f^{(2)}(x)f(x)}{\big(f'(x)\big)^2}$$

  e quindi:

$$h'(\alpha) = 0$$

  Allora:

  * Come detto nella Lezione 11, la condizione $|\, h'(\alpha)\,| = 0 < 1$ è *sufficiente* per poter affermare che il metodo di Newton *è utilizzabile per approssimare* α.
  * Il metodo ha *ordine di convergenza* ad α *almeno due.*

  – *Interpretazione geometrica: metodo delle tangenti.*

  Si rappresenti su un piano cartesiano il grafico della funzione f su $[a, b]$. Assegnato $z \in [a, b]$ il valore $h(z)$ si determina con la seguente costruzione grafica:

  * Si disegna la retta t tangente al grafico di f nel punto $P \equiv (z, f(z))$;
  * Si determina i punto $Q \equiv (\bar{z}, 0)$ intersezione di t con l'asse delle ascisse (l'intersezione è un punto perché, essendo $f'(z) \neq 0$, la retta t non è orizzontale): si ha $\bar{z} = h(z)$.

  L'equazione della retta tangente t è:

$$y = f'(z)(x - z) + f(z)$$

  da cui si ricava l'ascissa di Q:

$$0 = f'(z)(x - z) + f(z) \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = h(z)$$

  – *Criterio di scelta del valore iniziale per il metodo di Newton*

  Siano f con derivata seconda continua, I un intervallo e $\gamma \in I$ tali che:

  * Esiste α zero di f in I;
  * Per ogni $x \in I$ si ha $f'(x) \neq 0$ e $f^{(2)}(x) \neq 0$;
  * $f(\gamma)f^{(2)}(\gamma) > 0$.

  Allora: la successione generata dal metodo di Newton a partire da γ *è convergente* ad α e *monotona.*

  Dimostrazione: Per via grafica, in un caso particolare, si dimostra che la successione è monotona e limitata, dunque *convergente.* Il limite della successione è uno zero di f, ovvero un punto unito della funzione h, perché la successione è generata da un metodo ad un punto definito da una funzione h *continua.*

– *Esercizio.*

Sia $f(x) = x + \log x$. Decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per approssimare lo zero di f e, eventualmente, indicare un valore a partire dal quale la successione generata è convergente.

Soluzione. Sappiamo già che f ha un solo zero, α, separato dall'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$. La funzione f ha derivata prima *sempre positiva* e derivata seconda continua, dunque *il metodo di Newton è utilizzabile* per approssimare α. Inoltre, la derivata seconda è *sempre negativa*, dunque il criterio di scelta del valore iniziale per il metodo di Newton è utilizzabile e stabilisce che *per ogni* $\gamma \in [\frac{1}{2}, \alpha)$ la successione generata dal metodo di Newton converge allo zero ed è monotona crescente. Si osservi che, non essendo noto il valore di α, l'unico punto accessibile di quest'ultimo intervallo è $\frac{1}{2}$.

– *Esercizio* (per casa).

Sia $f(x) = e^x + x - 3$.

(1) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(2) Per ciascuno degli zeri di f decidere se il metodo ad un punto definito dalla funzione:

$$h(x) = 3 - e^x$$

sia utilizzabile per approssimare lo zero e, eventualmente, indicare un valore a partire dal quale la successione generata è convergente.

(3) Per ciascuno degli zeri di f decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per approssimare lo zero e, eventualmente, indicare un valore a partire dal quale la successione generata è convergente.

(D) Criteri d'arresto

- *Primo criterio*

Siano h, $[a, b]$ e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza e x_k la successione generata dal metodo ad un punto definito da h a partire da γ, convergente al punto unito α.

Si consideri il seguente criterio d'arresto:

$$\text{dato } \delta > 0: \quad \textit{Se } |\, h(x_k) - x_k \,| < \delta \textit{ allora } \text{arresta la costruzione}$$

– Il criterio è *calcolabile.*

– Il criterio è *efficace.* Infatti:

$$|\, h(x_k) - x_k \,| \leqslant |\, h(x_k) - h(\alpha) \,| + |\, \alpha - x_k \,| \leqslant L^k (L + 1) \,|\, x_0 - \alpha \,|$$

e quindi:

$$\lim_{k \to +\infty} |\, h(x_k) - x_k \,| = 0$$

Dunque, per ogni $\delta > 0$ la disuguaglianza è certamente soddisfatta dopo un numero finito di iterazioni. Inoltre:

$$|\, h(x_k) - x_k \,| = |\, h(x_k) - h(x_{k-1}) \,| \leqslant L \,|\, h(x_{k-1}) - x_{k-1} \,| < |\, h(x_{k-1}) - x_{k-1} \,|$$

ovvero la successione $|\, h(x_k) - x_k \,|$ è *decrescente* e tende a zero *almeno* come L^k.

Esercizi

---

1. Sia f la funzione definita da $f(x) = x + x^3$.

(1) Dimostrare che il metodo di Newton *è utilizzabile* per approssimare lo zero di f.

(2) Dimostrare che *non è possibile* utilizzare il criterio di scelta del valore iniziale per il metodo di Newton.

(3) Calcolare la funzione h che definisce il metodo di Newton applicato ad f e la derivata prima $h'(x)$. Utilizzare poi *Scilab* per disegnare il grafico di $h'(x)$ sull'intervallo $[-2, 2]$.

(4) Con il grafico disegnato al punto precedente determinare un intervallo che, insieme ad h, verifica le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza ed utilizzare poi il criterio di scelta del valore iniziale per metodi ad un punto.