Lezione 12

In questa lezione proseguiamo lo studio dei *metodi ad un punto*.

- *Esempio* (conclusione).

  Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = x + \log x$. La funzione ha un solo zero, α, separato dall'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$.

  Per approssimare α si considerano i metodi ad un punto definiti dalle funzioni:

  $$h_1(x) = -\log x \qquad , \qquad h_2(x) = e^{-x} \qquad , \qquad h_3(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}$$

  ciascuna delle quali ha *un solo* punto unito: α.

  Per ciascuno dei tre metodi ci si domanda se sia *utilizzabile* per approssimare α, ovvero: se sia possibile *determinare un intervallo che, insieme alla funzione che definisce il metodo, soddisfa le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza* (in caso affermativo, infatti, il Criterio di scelta del punto iniziale fornisce un valore a partire dal quale la successione generata dal metodo ad un punto risulta *convergente* ad α).

  Per il metodo definito da h_1 si è concluso che, essendo $|\, h_1'(\alpha) \,| > 1$, *non è utilizzabile*. Per il metodo definito da h_2 si è concluso che *è utilizzabile* e con il Criterio di scelta del punto iniziale si è trovato che il metodo genera una successione convergente ad α a partire da $\gamma = \frac{1}{2}$.

  - *Metodo definito da h_3.*

    La funzione h_3 ha derivata prima continua e l'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ verifica l'ipotesi (1). Inoltre per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha:

    $$|\, h_3'(x) \,| = \frac{1 - e^{-x}}{2} \leqslant L_3 = \frac{1 - 1/e}{2} < 1$$

    dunque è verificata anche l'ipotesi (2): *il metodo definito da h_3 è utilizzabile per approssimare α* e, come già stabilito studiando il metodo definito da h_2, la successione x_k generata a partire da $\gamma = \frac{1}{2}$ è convergente ad α.

    In questo caso: essendo $h_3'(x) > 0$ per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha sempre $x_k < \alpha$. Poiché la successione delle *distanze* $|\, x_k - \alpha \,|$ è, come sappiamo dalla dimostrazione del Teorema di convergenza, *decrescente*, se ne deduce che la successione x_k è *monotona crescente*.

Nell'Esempio si sono trovati *due* metodi utilizzabili per approssimare lo zero α di f. Per decidere se uno dei due metodi sia da preferirsi rispetto all'altro studiamo la *rapidità di convergenza* ad α delle successioni generate.

- *Definizione* (ordine di convergenza di un metodo ad un punto).

  Siano $[a, b]$, h e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza.

  - *Se $h'(\alpha) \neq 0$ allora*, eventualmente restringendo $[a, b]$, si ha:

    $$0 < \lambda = \min_{[a,b]} |\, h'(x) \,| \leqslant \max_{[a,b]} |\, h'(x) \,| = L < 1$$

    e quindi, per k maggiore o uguale ad un opportuno n:

    $$\lambda^{k-n} |\, x_n - \alpha \,| \leqslant |\, x_k - \alpha \,| \leqslant L^{k-n} |\, x_n - \alpha \,|$$

    ovvero: la successione $x_k - \alpha$ tende a zero *almeno* rapidamente come L^k ma *non più* rapidamente di λ^k. Restringendo $[a, b]$ e considerando k sufficientemente grande si conclude che:

    $$x_k \text{ tende ad } \alpha \text{ come } |\, h'(\alpha) \,|^k$$

- *Se* $h'(\alpha) = 0$[1] *allora*: per ogni $\theta > 0$ si ha:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|\, x_k - \alpha \,|}{\theta^k} = 0$$

ovvero: la successione $x_k - \alpha$ tende a zero *più rapidamente* di *qualsiasi* successione di tipo esponenziale.

- Si chiama *ordine di convergenza* del metodo ad un punto definito da h quando utilizzato per approssimare il punto unito α: *il più piccolo numero intero q tale che* $h^{(q)}(\alpha) \neq 0$.

  Si ha dunque:

  * Se $h'(\alpha) \neq 0$, l'ordine di convergenza è *uno* e *per tutte* le successioni convergenti x_k generate dal metodo la distanza $|\, x_k - \alpha \,|$ tende a zero come $|\, h'(\alpha) \,|^k$.
  * Se $h'(\alpha) = 0$, l'ordine è *almeno due* e per *tutte* le successioni convergenti x_k generate dal metodo la distanza $|\, x_k - \alpha \,|$ tende a zero più rapidamente di qualsiasi successione di tipo esponenziale. Dunque: *qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine due converge più rapidamente di qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine uno.*
  * In generale: *qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine p converge più rapidamente di qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine minore di p.*

Per i due metodi utilizzabili individuati nell'Esempio si ha:

$$|\, h_2'(\alpha) \,| = e^{-\alpha} \neq 0 \qquad \text{e} \qquad |\, h_3'(\alpha) \,| = \frac{1 - e^{-\alpha}}{2} \neq 0$$

dunque entrambi hanno ordine di convergenza *uno*. Essendo poi:

$$|\, h_2'(\alpha) \,| = e^{-\alpha} > \frac{1 - e^{-\alpha}}{2} = |\, h_3'(\alpha) \,|$$

si conclude che il metodo definito da h_3 genera una successione che tende ad α *più rapidamente* del metodo definito da h_2.

- *Studio grafico di un metodo ad un punto*

  Si suppongano rappresentati, in uno stesso piano cartesiano, *i grafici* della funzione h e quello della funzione identità, entrambi su un intervallo (limitato) $[a, b]$.

  - *Ricerca dei punti uniti di h in $[a, b]$.*

    I punti uniti di h in $[a, b]$ sono *le ascisse dei punti di intersezione* dei due grafici. Infatti, se $A \equiv (\bar{x}, \bar{y})$[2] è uno dei punti di intersezione si ha: $\bar{y} = \bar{x}$ (perché A fa parte del grafico della funzione identità) e $\bar{y} = h(\bar{x})$ (perché A fa parte del grafico della funzione h) e quindi $\bar{x} = h(\bar{x})$.

  - *Costruzione di un elemento della successione generata dal metodo.*

    Assegnato un elemento x in $[a, b]$ è possibile rappresentare $h(x)$ sull'asse delle ascisse con la costruzione seguente:

    (1) Si disegna la retta *verticale* passante per il punto $P \equiv (x, 0)$ e si individua il punto $Q \equiv (x, h(x))$ intersezione della retta con il grafico di h.

    (2) Si disegna la retta *orizzontale* passante per il punto Q e si individua il punto $R \equiv (h(x), h(x))$ intersezione della retta con il grafico della funzione identità.

    (3) Si disegna la retta *verticale* passante per il punto R e si individua il punto $S \equiv (h(x), 0)$ intersezione della retta con l'asse delle ascisse.

  - *Studio dell'utilizzabilità del metodo.*

    Sia $A \equiv (\alpha, 0)$ un punto di intersezione dei due grafici. Per studiare l'utilizzabilità del metodo per approssimare α:

[1] E la funzione h ha *derivata seconda* continua.

[2] Il simbolo $\equiv$ si legge: "di coordinate."

(i) Si considerano la retta t tangente al grafico di h in A, la retta b grafico della funzione identità (già presente nel disegno) e la retta p grafico della funzione $x \mapsto \alpha - x$, e

(ii) Si *ruota* la retta b intorno al punto A in senso *orario*.

Si ha: $|\, h'(\alpha) \,| < 1$ *se e solo se* $t \neq b, t \neq p$ e nella rotazione b si sovrappone *prima* a t e *poi* a p.

Esercizi

---

1. Per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha $h_3'(x) > 0$. Dimostrare che:

   (1) *se* $x \in [\frac{1}{2}, \alpha)$ *allora* $h_3(x) \in (x, \alpha)$.

   (2) *se* $x \in (\alpha, 1]$ *allora* $h_3(x) \in (\alpha, x)$.

   Dedurne che *se* $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ *allora* $h(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ e quindi che *per ogni* $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$ la successione generata dal metodo definito da h_3 *converge* ad α.

2. Siano $[a, b]$, h e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza. Inoltre, per ogni $x \in [a, b]$ sia:
$$\lambda \leqslant |\, h'(x) \,| \leqslant L$$
   Dimostrare che, allora:
$$\lambda^k |\, x_0 - \alpha \,| \leqslant |\, x_k - \alpha \,| \leqslant L^k |\, x_0 - \alpha \,|$$

3. Sia h una funzione con derivata seconda continua, α un punto unito di h e x_k una successione convergente ad α generata dal metodo ad un punto definito da h. Sia infine $h'(\alpha) = 0$ e $h^{(2)}(\alpha) \neq 0$ (il metodo ad un punto definito da h ha *ordine di convergenza* ad α *due*).

   (1) Utilizzare la Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange per dimostrare che *per ogni* k esiste un numero reale c_k tale che:
$$|\, x_k - \alpha \,| = c_k \,|\, x_{k-1} - \alpha \,|^2$$
   e che:
$$\lim_{k \to +\infty} c_k = \left|\, \tfrac{1}{2}\, h^{(2)}(\alpha) \,\right| \neq 0$$

   (2) Sia $c \neq 0$. Dimostrare che la successione d_k definita dall'iterazione $d_k = c\, d_{k-1}^2$ è:
$$d_k = \frac{1}{c}\,(c d_0)^{2^k}$$

   (3) Siano $\omega, \theta \in (0, 1)$. Dimostrare che:
$$\lim_{k \to +\infty} \log \frac{\omega^{2^k}}{\theta^k} = -\infty$$
   ovvero che:
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\omega^{2^k}}{\theta^k} = 0$$

4. Sia f la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$ da $f(x) = x - e^{x-2}$.

   (1) Dimostrare che f ha *due* zeri e *separarli*.

   (2) Dimostrare che i punti uniti della funzione h definita da $h(x) = e^{x-2}$ sono *tutti e soli* gli zeri di f.

   (3) Dimostrare, prima *graficamente* poi *analiticamente*, che il metodo ad un punto definito da h è *utilizzabile* per approssimare uno degli zeri e *non utilizzabile* per l'altro.