Lezione 11

In questa lezione inizieremo lo studio di una *classe* di metodi per l'approssimazione di uno zero di una funzione: i *metodi ad un punto.*

(B) Metodi ad un punto

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione continua della quale si vuole approssimare uno zero. I metodi ad un punto si basano sull'idea di *sostituire* la ricerca di uno zero di f con la ricerca di un *punto unito* di una funzione continua h opportunamente scelta. Si ricordi che un *punto unito* di una funzione $h : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, è un numero reale $\alpha \in \Omega$ che verifica la relazione:

$$\alpha = h(\alpha)$$

Perché l'idea sia ragionevole, occorre che h abbia la proprietà seguente:

$$\text{insieme degli } \textit{zeri} \text{ di } f \quad = \quad \text{insieme dei } \textit{punti uniti} \text{ di } h$$

Assegnata f esistono *infinite* funzioni h che hanno la proprietà richiesta.

- *Esempi.*
  - Sia $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

    $$h(x) = x - f(x)$$

    La funzione h è continua (perchè lo è f) e si ha:

    $$f(\alpha) = 0 \Rightarrow h(\alpha) = \alpha - f(\alpha) = \alpha$$

    e:

    $$\alpha = h(\alpha) \Rightarrow \alpha = \alpha - f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = 0$$
  - Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che:

    $$\text{per ogni } x \in [a, b] \text{ si ha } g(x) \neq 0$$

    Allora la funzione h definita da:

    $$h(x) = x - g(x)f(x)$$

    è continua e $\alpha \in [a, b]$ è punto unito di h se e solo se è zero di f. (*Esercizio*: dimostrare l'asserto.)

Sia h una funzione continua che verifica la proprietà richiesta. La procedura seguente realizza il *metodo ad un punto definito da* h :

- $x = \textit{MetodoUnPunto}\,(h, \gamma)$

  // $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione continua, $\gamma \in [a, b]$.

  $x_0 = \gamma$;

  `per` $k = 1, 2, \ldots$ `ripeti`:

      `se` $x_{k-1} \in [a, b]$ `allora` $x_k = h(x_{k-1})$; `altrimenti` esci dal ciclo;

La procedura termina *se e solo se* per qualche x_k si ha $x_k \notin [a, b]$. Se per ogni k si ha $x_k \in [a, b]$ la procedura *non termina* e costruisce la successione di numeri reali $x_k \in [a, b]$.

Si ha:

- Siano $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua* e $\gamma \in [a, b]$. *Se la procedura* $\textit{MetodoUnPunto}\,(h, \gamma)$ *genera una successione* x_k *convergente, allora il limite della successione è un punto unito di* h *in* $[a, b]$.

  Dimostrazione: Sia α il limite della successione x_k. La successione $h(x_0), h(x_1), \ldots,$ per la continuità di h, è convergente e $\lim h(x_k) = h(\alpha)$. Ma le successioni $x_1, x_2, \ldots$ e $h(x_0), h(x_1), \ldots$ sono *identiche* e quindi hanno lo stesso limite, ovvero $\alpha = h(\alpha)$.

Il teorema seguente fornisce *condizioni sufficienti* affinché la procedura *MetodoUnPunto* (h, γ) generi una successione *convergente*.

- *Teorema* (di convergenza).

  Siano $[a, b]$ un intervallo, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *con derivata prima continua* e γ un elemento di $[a, b]$ tali che:

  (1) esiste α punto unito di h in $[a, b]$;

  (2) esiste $L \in [0, 1)$ tale che per ogni $x \in [a, b]$ si ha: $|\, h'(x) \,| \leqslant L$;

  (3) la procedura *MetodoUnPunto* (h, γ) genera una successione x_k in $[a, b]$.

  Allora: (i) α è l'*unico* punto unito di h in $[a, b]$ e (ii) la successione x_k è *convergente* ad α.

  Dimostrazione. (i) Per assurdo: se $\beta \neq \alpha$ è un altro punto unito di h in $[a, b]$ si ha:

$$\beta - \alpha = h(\beta) - h(\alpha)$$

  Per il Teorema di Lagrange esiste un numero reale θ compreso tra α e β, e quindi $\theta \in [a, b]$, tale che:

$$h(\beta) - h(\alpha) = h'(\theta)(\beta - \alpha)$$

  ovvero:

$$\beta - \alpha = h'(\theta)(\beta - \alpha)$$

  Essendo $\beta - \alpha \neq 0$, l'uguaglianza precedente sussiste *se e solo se* $h'(\theta) = 1$. Questo contraddice l'ipotesi (2).

  (ii) Dimostriamo che la successione $x_k - \alpha$ converge a zero. Sia k un intero positivo. Allora:

$$x_k - \alpha = h(x_{k-1}) - h(\alpha)$$

  Per il Teorema di Lagrange esiste un numero reale θ_{k-1} compreso tra x_{k-1} e α, e quindi $\theta_{k-1} \in [a, b]$, tale che:

$$h(x_{k-1}) - h(\alpha) = h'(\theta_{k-1})(x_{k-1} - \alpha)$$

  ovvero:

$$x_k - \alpha = h'(\theta_{k-1})(x_{k-1} - \alpha)$$

  Allora, utilizzando l'ipotesi (2):

$$|\, x_k - \alpha \,| = |\, h'(\theta) \,|\, |\, x_{k-1} - \alpha \,| \leqslant L \,|\, x_{k-1} - \alpha \,|$$

  Ripetendo il ragionamento a partire da $x_{k-1} - \alpha$ si ottiene:

$$|\, x_{k-1} - \alpha \,| \leqslant L \,|\, x_{k-2} - \alpha \,|$$

  e quindi:

$$|\, x_k - \alpha \,| \leqslant L^2 \,|\, x_{k-2} - \alpha \,|$$

  Iterando all'indietro si ha infine:

$$0 \leqslant |\, x_k - \alpha \,| \leqslant L^k \,|\, x_0 - \alpha \,|$$

  Poiché $L < 1$ la successione $L^k \,|\, x_0 - \alpha \,|$, e quindi $|\, x_k - \alpha \,|$, tende a zero.

Il ruolo del numero reale γ (il *valore iniziale* della successione) è di garantire che il metodo definito da h generi una successione in $[a, b]$. L'Osservazione che segue fornisce *un valore* che soddisfa la richiesta.

- *Criterio di scelta del valore iniziale per metodi ad un punto.*

  Siano $[a, b]$ un intervallo ed $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima continua che verificano le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza. Allora, detto α il punto unito di h in $[a, b]$, l'elemento:

$$\gamma = \text{l'estremo di } [a, b] \text{ più vicino ad } \alpha$$

verifica l'ipotesi (3) del Teorema di convergenza.

Dimostrazione. Sia $d = |\gamma - \alpha|$ e I l'intorno chiuso di centro α e raggio d. Per come definito γ si ha $I \subset [a,b]$. Sia ora $x \in I$. Allora: $|h(x) - \alpha| = |h(x) - h(\alpha)|$ e, utilizzando il Teorema di Lagrange: esiste un numero reale θ compreso tra x e α, e quindi $\theta \in [a,b]$, tale che: $h(x) - h(\alpha) = h'(\theta)(x - \alpha)$, dunque $|h(x) - \alpha| = |h'(\theta)|\,|x - \alpha|$. Utilizzando l'ipotesi (2): $|h(x) - \alpha| \leqslant L\,|x - \alpha| < |x - \alpha| = d$, ovvero $h(x) \in I$. Ne segue che se $x_0 \in I \subset [a,b]$ allora per ogni numero intero positivo k si ha: $x_k = h(x_{k-1}) \in I \subset [a,b]$.

L'esempio che segue mostra l'uso del Teorema di convergenza e del Criterio di scelta del valore iniziale.

- *Esempio.*

  Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = x + \log x$. Poiché per ogni $x > 0$ si ha $f'(x) = 1 + 1/x > 0$, la funzione f ha *al più* uno zero. L'*esistenza* di uno zero si ottiene osservando che:

  $$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  Infine, essendo $f(1) = 1 > 0$, l'intervallo $(0,1)$ *separa* lo zero di f.[1]

  Sia α lo zero di f. Per approssimare α si considerano i metodi ad un punto definiti dalle funzioni:

  $$h_1(x) = -\log x \qquad , \qquad h_2(x) = e^{-x} \qquad , \qquad h_3(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}$$

  Si verifica facilmente (esercizio!) che i punti uniti di ciascuna di esse sono *tutti e soli* gli zeri di f. Dunque ciascuna ha *un solo* punto unito in $(0,1)$.

  Per ciascuno dei tre metodi ci si domanda se sia *utilizzabile* per approssimare α, ovvero: se sia possibile *determinare un intervallo che, insieme alla funzione che definisce il metodo, soddisfa le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza* (in caso affermativo, infatti, il Criterio di scelta del punto iniziale fornisce un valore a partire dal quale la successione generata dal metodo ad un punto risulta *convergente* ad α).

  - *Metodo definito da h_1.*

    La funzione h_1 ha derivata prima continua. L'ipotesi (1) del Teorema di convergenza richiede un intervallo *chiuso* su cui h_1 è definita e che include il punto unito. L'intervallo $[0,1]$ non è utilizzabile: la funzione h_1 non è definita in 0. Un intervallo che soddisfa le richieste è $[\frac{1}{2}, 1]$, ottenuto constatando che nel punto medio dell'intervallo $[0,1]$ la funzione f assume valore *negativo* ed utilizzando il Teorema di esistenza degli zeri.

    Scelto l'intervallo, studiamo la *derivata prima* di h_1. Per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha:

    $$|h_1'(x)| = \frac{1}{x} \geqslant 1$$

    dunque l'ipotesi (2) *non è verificata.* In questo caso *non esiste* un intervallo che verifica le ipotesi (1) e (2), e dunque *il metodo definito da h_1 non è utilizzabile per approssimare* α, perché essendo $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ si ha certamente:

    $$|h_1'(\alpha)| > 1$$

  - *Metodo definito da h_2.*

    La funzione h_2 ha derivata prima continua. L'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ verifica l'ipotesi (1). Inoltre per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha:

    $$|h_2'(x)| = e^{-x} \leqslant L_2 = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$$

    dunque è verificata anche l'ipotesi (2): *il metodo definito da h_2 è utilizzabile per approssimare* α. Poiché $f(\frac{3}{4}) > 0$, per il Criterio di scelta del punto iniziale la successione x_k generata a partire da $\gamma = \frac{1}{2}$ è convergente ad α.

[1] Ovvero: è un intervallo di misura *finita* che include *un solo* zero di f.

Essendo $h_2'(x) < 0$ per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, utilizzando il Teorema di Lagrange si può dedurre la seguente *proprietà qualitativa* della successione: per ogni k le differenze $x_k - \alpha$ e $x_{k+1} - \alpha$ sono non nulle ed *hanno segno opposto*, ovvero: x_k ed x_{k+1} sono “da parti opposte” rispetto ad α.

- *Osservazione sulla nozione di metodo utilizzabile.*

  Si è scelto di dichiarare *utilizzabile* un metodo quando *è possibile determinare un intervallo che, insieme alla funzione che definisce il metodo, soddisfi le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza.*

  Una *condizione sufficiente* di utilizzabilità di un metodo è che esso sia definito da una funzione h con derivata prima continua e che nel punto unito in esame, α, si abbia $|\, h'(\alpha) \,| < 1$. In tal caso, infatti, la continuità della derivata prima di h garantisce l'esistenza di un intervallo chiuso che contiene α e in tutti i punti x del quale di ha $|\, h'(x) \,| < 1$.

  Viceversa, una *condizione sufficiente* di *non* utilizzabilità di un metodo è che esso sia definito da una funzione h con derivata prima continua e che nel punto unito in esame, α, si abbia $|\, h'(\alpha) \,| > 1$ (è la situazione incontrata analizzando il metodo definito da h_1).

  Si ha inoltre:

  – Siano h una funzione con derivata prima continua e α un punto unito di h tali che:

  $$|\, h'(\alpha) \,| > 1$$

  Se x_k è una successione generata dal metodo ad un punto definito da h *allora* sussiste una delle due seguenti eventualità *mutuamente esclusive*:

  ⋄ x_k è definitivamente uguale a α

  ⋄ x_k non converge ad α

  Dunque un metodo non utilizzabile *può* generare successioni convergenti ad α (se ne ottiene una, ad esempio, scegliendo come valore iniziale α) ma *non è ragionevole* supporre di poter ottenere un valore iniziale *praticamente utilizzabile* per la costruzione di una successione convergente.

Esercizi

---

1. Sia $h(x) = \frac{1}{2} \cos x$.

   (1) Dimostrare che l'intervallo $[0, \pi/2]$ *separa* un punto unito, α, di h.

   (2) Constatare che le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza sono verificate con $[a, b] = [0, \pi/2]$.

   (3) Dimostrare che *se* $x \in [0, \pi/2]$ *allora* $h(x) \in [0, \pi/2]$.

   (4) Determinare *tutti* i valori $\gamma \in [0, \pi/2]$ a partire dai quali la successione generata dal metodo definito da h risulta convergente ad α.

2. Sia $h(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = 3 - \frac{1}{2}x$. Dimostrare che h ha derivata prima continua e che le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza sono verificate con $[a, b] = [1, 7]$. Discutere gli assegnamenti $x = \mathit{MetodoUnPunto}\,(h, 7)$ e $x = \mathit{MetodoUnPunto}\,(h, 1)$

3. Dimostrare la *versione lipschitziana* del Teorema di convergenza:

   Siano $[a, b]$ un intervallo, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e γ un elemento di $[a, b]$ tali che:

   (1) esiste α punto unito di h in $[a, b]$;

   (2) esiste $L \in [0, 1)$ tale che per ogni $x, y \in [a, b]$ si ha: $|\, h(x) - h(y) \,| \leqslant L \,|\, x - y \,|$;[2]

   (3) la procedura $\mathit{MetodoUnPunto}\,(h, \gamma)$ genera una successione x_k in $[a, b]$.

   Allora: (i) α è l'*unico* punto unito di h in $[a, b]$ e (ii) la successione x_k è *convergente* ad α.

[2] Una funzione che verifica questa proprietà si chiama *contrazione* su $[a, b]$. La disuguaglianza significa, infatti, che h “contrae” la distanza tra x ed y.