Lezione 10

In questa lezione concluderemo la discussione riguardante il metodo di bisezione.

- *Esercizio.*

  Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. La procedura:

  $$z = \mathit{Bisezione}\,(f, a, b, \delta)$$

  restituisce un'approssimazione di uno zero di f in $[a, b]$ dopo aver eseguito k iterazioni. Si vuole determinare k.

  Se la procedura termina trovando uno zero di f, il numero di iterazioni eseguite è in generale imprevedibile. Se invece la procedura termina perchè l'ultimo intervallo costruito ha misura minore di δ allora:

  $$\operatorname{mis} I_k = \frac{\operatorname{mis} I_0}{2^k} < \delta \quad \Rightarrow \quad k > \log_2 \operatorname{mis} I_0 - \log_2 \delta$$

  La procedura si arresta dopo aver eseguito:

  $$k = \lfloor \log_2 \operatorname{mis} I_0 - \log_2 \delta \rfloor + 1$$

  iterazioni.[1]

  Ad esempio, se $\operatorname{mis} I_0 = 2$ e $\delta = 10^{-10}$ si ha:

  $$k = \lceil 1 + 10 \log_2 10 \rceil = 35$$

  Inoltre, fissato $\operatorname{mis} I_0$, il valore di k tende a infinito come $\log_2 \delta$.

  In generale: *tanto più accurata* l'utilizzatore vuole che sia l'approssimazione richiesta, *tante più iterazioni* deve eseguire la procedura (cioè: *tanto più impegnativo* è ottenere l'approssimazione).

- *Criterio d'arresto di tipo relativo*

  Il criterio d'arresto utilizzato nella procedura $\mathit{Bisezione}\,(f, a, b, \delta)$ è stato classificato di *tipo assoluto* perchè l'ultimo elemento calcolato della successione approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta *a patto* che l'utilizzatore misuri l'accuratezza con l'*errore assoluto*. Un criterio di *tipo relativo*, adatto quindi se l'utilizzatore misura l'accuratezza con l'*errore relativo*, è il seguente:

  $$\text{dato } \epsilon > 0, \text{ sia } m_k = \min\{\, |\, a_k \,|, |\, b_k \,|\, \}: \quad \mathit{Se}\ \frac{\operatorname{mis} I_k}{m_k} < \epsilon\ \mathit{allora} \text{ arresta la costruzione}$$

  Il criterio, in quanto di tipo relativo, è utilizzabile *solo* quando la procedura approssima uno zero *non nullo* di f e in tal caso si può supporre che sia:

  $$0 \notin I_0 = [a, b]$$

  e quindi $0 \notin I_k$ (che assicura $m_k \neq 0$) per ogni k.

  Il criterio è *calcolabile*: a ciascuna iterazione la procedura conosce a_k e b_k, sa calcolare m_k e verificare se la disuguaglianza è soddisfatta. Il criterio è anche *efficace*, infatti:

  $$\operatorname{mis} I_k \to 0 \quad \text{e} \quad m_k \geqslant m_0 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim \frac{\operatorname{mis} I_k}{m_k} = 0$$

  dunque per ogni $\epsilon > 0$ la disuguaglianza è certamente verificata dopo un numero finito di iterazioni. Infine, quando il criterio di arresto è verificato la procedura restituisce x_k, punto

[1] Se t è un numero reale positivo, $\lfloor t \rfloor$ è la *parte intera* di t: il più grande intero minore o uguale di t. Dunque $\lfloor t \rfloor + 1$ è il più piccolo intero maggiore di t.

medio dell'ultimo intervallo calcolato I_k. L'intervallo I_k, per costruzione, contiene almeno uno zero $\alpha \neq 0$ di f e si ha:

$$\frac{|\,x_k - \alpha\,|}{|\,\alpha\,|} \leqslant \frac{\operatorname{mis} I_k}{m_k} < \epsilon$$

ovvero la procedura restituisce un valore che approssima uno zero di f con *errore relativo* inferiore ad ϵ.

Introducendo il criterio d'arresto descritto la procedura *Bisezione* si modifica in:

- $z = \mathit{Bisezione}\,(f, a, b, \epsilon)$

  // $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $0 \notin [a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$.
  $a_0 = a; b_0 = b; x_0 = (a_0 + b_0)/2;\ m_0 = \min\{\,|\,a_0\,|, |\,b_0\,|\,\}$;
  `per` $k = 1, 2, \ldots$ `ripeti`:
  `se` $\big(f(x_{k-1}) = 0$ `oppure` $\operatorname{mis} I_{k-1}/m_{k-1} < \epsilon\big)$ `allora` esci dal ciclo;
  `se` $f(x_{k-1})f(b_{k-1}) < 0$ `allora` $a_k = x_{k-1}; b_k = b_{k-1}$;
  `se` $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ `allora` $a_k = a_{k-1}; b_k = x_{k-1}$;
  $x_k = (a_k + b_k)/2;\ m_k = \min\{\,|\,a_k\,|, |\,b_k\,|\,\}$;
  $z = x_{k-1}$

- *Esercizi.*

  - *Per casa*: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $0 \notin [a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$. L'assegnamento:

    $$z = \mathit{Bisezione}\,(f, a, b, \epsilon)$$

    restituisce un'approssimazione di uno zero di f in $[a, b]$ dopo aver eseguito k iterazioni. Determinare k.

  - Sia:

    $$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{2}}$$

    Discutere l'assegnamento $z = \mathit{Bisezione}\,(f, 0, 2)$.

    La procedura può arrestare la costruzione delle successioni *solo se* determina x_k zero di f. Ma f *non ha zeri* e quindi la procedura *non termina*. Le successioni a_k, b_k e x_k che la procedura costruisce sono ancora convergenti ad un limite comune α (rileggere la seconda parte della Lezione 9), ma α *non può essere* uno zero di f. Nella Lezione citata, la conclusione "α è zero di f" è conseguenza dell'essere f *definita e continua* in $[a, b]$, proprietà che nel caso in esame non sussiste. Per costruzione, ciascuno degli intervalli I_k contiene punti in cui f assume valori di segno opposto. Poichè $\lim \operatorname{mis} I_k = 0$ non può che essere $\alpha = \sqrt{2}$. *La procedura individua un punto in cui f "cambia segno"*.

- *Uso delle procedure in $F(\beta, m)$.*

  Si vuole approssimare uno zero della funzione f con il metodo di bisezione. Quando si *realizzano* le procedure con *Scilab* (o comunque con un calcolatore che opera in $F(\beta, m)$), occorre tener presente che:

  - Le successioni di numeri reali a_k, b_k – che definiscono gli intervalli I_k – sono sostituite da successioni di *numeri di macchina* α_k, β_k – che definiscono gli intervalli $J_k = [\alpha_k, \beta_k]$;
  - Le successioni α_k e β_k sono costruite considerando la successione di *numeri di macchina* ξ_k definita da:

    $$\xi_k = (\alpha_k \oslash 2) \oplus (\beta_k \oslash 2)$$

    in luogo della successione x_k di numeri reali definita da:

    $$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

  - La procedura *approssima* i valori di f con un *algoritmo*, ϕ, scelto dall'utilizzatore;
  - Il criterio d'arresto è realizzato utilizzando ϕ e pseudo-operazioni aritmetiche in luogo di f ed operazioni aritmetiche.

In particolare:

- Lo zero verrà cercato in un intervallo J_0 diverso da $[a, b]$.
- Il numero di macchina ξ_k è l'arrotondato del punto medio dell'intervallo J_k.
- L'intervallo J_{k+1} viene scelto in base al valore di $\phi(\xi_k)$. Se l'errore relativo commesso approssimando $f(\xi_k)$ con $\phi(\xi_k)$ è *maggiore di* -1 allora $f(\xi_k)$ e $\phi(\xi_k)$ hanno lo *stesso segno*, altrimenti hanno *segno diverso*. Solo nel primo caso la scelta dell'intervallo avviene in modo *coerente* con il segno di $f(\xi_k)$.
- La procedura si arresta se $\phi(\xi_k) = 0$. *Non è certo* che in tal caso ξ_k si auno zero di f.
- La disuguaglianza del criterio d'arresto di tipo assoluto sarà realizzata da:

  $$\beta_k \ominus \alpha_k < \mathrm{rd}(\delta)$$

  Poiché:

  $$\beta_k \ominus \alpha_k < \mathrm{rd}(\delta) \quad \Rightarrow \quad \beta_k - \alpha_k < \delta$$

  se il criterio d'arresto è verificato si ha: $\mathrm{mis}\, J_k < \delta$. Dunque, *se* J_k contiene α zero di f vale:

  $$|\, \xi_k - \alpha \,| \leqslant \beta_k - \alpha_k < \delta$$

  ovvero *la procedura restituisce un valore che approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta dall'utilizzatore.*
- La disuguaglianza del criterio d'arresto di tipo relativo sarà realizzata, dopo aver posto:

  $$\mu_k = \min\{\,|\,\alpha_k\,|, |\,\beta_k\,|\,\}$$

  da:

  $$(\beta_k \ominus \alpha_k) \oslash \mu_k < \mathrm{rd}(\epsilon)$$

  Si ha:

  $$(\beta_k \ominus \alpha_k) \oslash \mu_k < \mathrm{rd}(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta_k \ominus \alpha_k}{\mu_k} < \epsilon$$

  Per definizione si ha anche:

  $$\beta_k \ominus \alpha_k = \mathrm{rd}(\beta_k - \alpha_k) = (1 + t)(\beta_k - \alpha_k) \quad \text{con} \quad |\, t\,| \leqslant u$$

  ovvero:

  $$(1 - u)(\beta_k - \alpha_k) \leqslant \beta_k \ominus \alpha_k \leqslant (1 + u)(\beta_k - \alpha_k)$$

  Se ne conclude che certamente vale:

  $$\frac{\beta_k \ominus \alpha_k}{\mu_k} < \frac{\epsilon}{1 - u}$$

  Se il criterio d'arresto è verificato si ha quindi: *se* J_k contiene α zero di f:

  $$\left| \frac{\xi_k - \alpha}{\alpha} \right| \leqslant \frac{\beta_k - \alpha_k}{\mu_k} < \frac{\epsilon}{1 - u} \approx \epsilon$$

  ovvero,anche in questo caso *la procedura restituisce un valore che approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta dall'utilizzatore.*

L'esempio che segue mostra, però, che nella realizzazione al calcolatore il criterio d'arresto di tipo assoluto (ma lo stesso vale per quello di tipo relativo) *può risultare non efficace.*

- *Esempio.*
  Sia $f(x) = x^2 - 2$. Se, posto $\delta = 10^{-16}$, si esegue l'assegnamento:

  $$z = \mathit{Bisezione}\,(f, 0, 2, \delta)$$

  con un calcolatore che opera in $F(2, 53)$, la procedura *non termina*: il criterio d'arresto risulta *non efficace.*

Il problema è questo: Si è chiesto alla procedura di determinare un intervallo *ad estremi numeri di macchina*, *contenente* $\sqrt{2}$ e *di misura minore di* δ. Ma *il più piccolo* intervallo che ha le prime due delle proprietà richieste è quello che ha per estremi i due elementi di $F(2,53)$ *adiacenti* a $\sqrt{2}$. Poiché l'esponente di $\sqrt{2}$ in base due è *uno*, la misura di tale intervallo (la distanza tra i due numeri di macchina) è $\beta^{b-m} = 2^{1-53} \approx 2.22\,10^{-16}$, *maggiore* di δ.

La procedura *non può* trovare quanto richiesto e quindi *non termina.* In generale, detto b l'esponente dello zero di f che si vuole approssimare, l'utilizzatore *deve* assegnare al parametro δ un valore maggiore di 2^{b-53}.

Esercizi

---

1. Siano $M = F(2,m)$ l'insieme dei numeri di macchina e $\alpha, \omega \in M$. Dimostrare che:
$$\xi = (\alpha \oslash 2) \oplus (\omega \oslash 2) = \mathrm{rd}\Big(\frac{\alpha+\omega}{2}\Big)$$
Dunque ξ è *l'arrotondato del punto medio* dell'intervallo $[\alpha,\omega]$. Dimostrare che, allora:
$$\alpha \leqslant \xi \leqslant \omega$$

2. Siano β un numero intero pari e rd la funzione arrotondamento in $F(\beta,m)$. Si supponga noto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{Z}$ si ha:
$$\mathrm{rd}(\beta^b x) = \beta^b\,\mathrm{rd}(x)$$
Siano $M = F(2,m)$ l'insieme dei numeri di macchina e $\alpha, \omega \in M$. Dimostrare che:
$$\theta = (\alpha \oplus \omega) \oslash 2 = \mathrm{rd}\Big(\frac{\alpha+\omega}{2}\Big)$$
ovvero che θ è *l'arrotondato del punto medio* dell'intervallo $[\alpha,\omega]$.

3. Siano $M = F(10,6)$ l'insieme dei numeri di macchina e $\alpha = 0.742531, \omega = 0.742533 \in M$. Calcolare:
$$\gamma = (\alpha \oplus \omega) \oslash 2$$
e constatare che $\gamma < \alpha$.

4. Siano β un numero intero pari, x un numero reale positivo e b un numero intero. Dimostrare che, detta rd la funzione arrotondamento in $F(\beta,m)$, si ha:
$$\mathrm{rd}(\beta^b x) = \beta^b\,\mathrm{rd}(x) \qquad\qquad (*)$$

   Soluzione.

   Se $x \in F(\beta,m)$ anche $\beta^b x \in F(\beta,m)$ e l'uguaglianza $(*)$ è verificata: $\mathrm{rd}(\beta^b x) = \beta^b x = \beta^b \mathrm{rd}(x)$.

   Se $x \notin F(\beta,m)$, siano ξ e $\sigma(\xi)$ gli elementi di $F(\beta,m)$ *adiacenti* ad x. Detti n l'esponente e γ la frazione di ξ si ha:

   (a) $\beta^b\xi < \beta^b x < \beta^b\sigma(\xi) = \beta^b\sigma(\beta^n\gamma) = \beta^{b+n}(\gamma + \beta^{-m}) = \sigma(\beta^b\xi)$

   (b) $|\,x-\xi\,| \gtreqqless |\,x-\sigma(\xi)\,|$ se e solo se $|\,\beta^b x - \beta^b\xi\,| \gtreqqless |\,\beta^b x - \sigma(\beta^b\xi)\,|\,\big(= |\,\beta^b x - \beta^b\sigma(\xi)\,|\big)$

   (c) Per ogni $\theta \in F(\beta,m)$ la frazione di $\beta^b\theta$ è uguale a quella di θ.

   L'asserto (a) significa che $\beta^b\xi$ e $\sigma(\beta^b\xi)$ sono gli elementi di $F(\beta,m)$ *adiacenti* a $\beta^b x$; l'asserto (b) dimostra l'uguaglianza $(*)$ nel caso di elementi adiacenti *non* equidistanti e l'asserto (c) nel caso di elementi adiacenti equidistanti.

5. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \neq 0$ e ϕ l'algoritmo utilizzato per approssimare il valore di f in x. Sia infine e l'errore relativo commesso approssimando $f(x)$ con $\phi(x)$. Dimostrare che $f(x)$ e $\phi(x)$ hanno lo *stesso segno* se e solo se $e > -1$.

6. Sia `Bisezione` la procedura *Scilab* realizzata nella prima parte dell'Esercitazione 3 e f la funzione definita da $f(x) = \text{sen } x$.

   (1) Dopo aver definito la funzione di intestazione:

   ```
   function y = S(x)
   ```

   che realizza f ed assegnato alla variabile `u` il valore della precizione di macchina, constatare che dopo l'assegnamento:

   ```
   [z,v] = Bisezione(S,2,4,4*u)
   ```

   il valore di `z` è $\text{rd}(\pi)$.

   (2) Spiegare perché l'esecuzione dell'assegnamento precedente *termina* mentre quella dell'assegnamento:

   ```
   [z,v] = Bisezione(S,2,4,3*u)
   ```

   non termina.