Lezione 8

In questa lezione descriveremo una semplice procedura di ricerca degli zeri di una funzione continua.

1 Zeri di funzione

Il problema che affronteremo in questa sezione è il seguente: *data una funzione continua f definita in un intervallo $[a, b]$, decidere se esiste $\alpha \in [a, b]$ tale che $f(\alpha) = 0$ ed eventualmente determinare un'approssimazione accurata di α.*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Una *condizione sufficiente* per l'esistenza di *almeno uno* zero di f è data dal seguente:

- *Teorema* (di esistenza degli zeri).

  Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*. Se $f(a)\, f(b) < 0$ allora esiste $\alpha \in (a, b)$ zero di f.

  - *Esempio*

    Sia $f(x) = e^{x^2} - 2$.

    * f è continua su $[0, 1]$ e $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = e - 2 > 0$ il Teorema di esistenza degli zeri assicura l'esistenza di *almeno uno* zero di f in $(0, 1)$.
    * f è continua su $[-1, 1]$ ma $f(-1) = e - 2 > 0$ e $f(1) > 0$. Il Teorema di esistenza degli zeri *non è applicabile* e quindi non fornisce informazioni sull'esistenza di zeri di f in $(-1, 1)$. La funzione è pari, dunque ha certamente qualche zero in $(-1, 1)$.

(A) Metodo di bisezione

Il primo metodo che consideriamo per approssimazione di uno zero di una funzione continua è il *metodo di bisezione*, basato sul teorema appena enunciato. Diamo la descrizione e discutiamo una procedura che realizza tale metodo.

- $z =$ *Bisezione*(f, a, b)

  // $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$.

  $a_0 = a; b_0 = b; x_0 = (a_0 + b_0)/2;$

  `per` $k = 1, 2, \ldots$ `ripeti`:

  `se` $f(x_{k-1}) = 0$ `allora` esci dal ciclo;

  `se` $f(x_{k-1})f(b_{k-1}) < 0$ `allora` $a_k = x_{k-1}; b_k = b_{k-1};$

  `se` $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ `allora` $a_k = a_{k-1}; b_k = x_{k-1};$

  $x_k = (a_k + b_k)/2;$

  $z = x_{k-1}$

Se per qualche k si ha $f(x_{k-1}) = 0$, la procedura *termina* e restituisce uno zero di f. Se, invece, per ogni k si ha $f(x_{k-1}) \neq 0$, la procedura *non termina* e genera *due* successioni: la successione di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ e la successione di numeri reali x_k.

Ciascuno degli intervalli della successione I_k contiene, per costruzione, almeno uno zero di f e per ogni k si ha:

$$I_k \subset I_{k-1} \qquad \text{e} \qquad \text{mis}\, I_k = \frac{\text{mis}\, I_0}{2^k}$$

Dalla seconda proprietà segue:

$$\lim_{k\to\infty} \text{mis}\, I_k = 0$$

La successione di intervalli “individua con incertezza tendente a zero” uno zero di f.

La successione di numeri reali, come vedremo nella prossima Lezione, *converge ad uno zero di f*. La procedura *individua* dunque uno zero della funzione come *limite* della successione generata. Per rendere *finito* in ogni caso il tempo di esecuzione della procedura (la costruzione di *tutta* la successione richiede *certamente* un tempo infinito) è necessario *interrompere* la costruzione della successione. Così facendo la procedura determinerà solo *un'approssimazione* di uno zero di f. La costruzione della successione deve essere interrotta *quando l'ultimo elemento costruito approssima uno zero di f con sufficiente accuratezza.* A questo lo scopo si introduce nella procedura un *criterio d'arresto*:

$$\text{dato } \delta > 0: \quad \textit{Se} \ \operatorname{mis} I_k < \delta \ \textit{allora} \text{ arresta la costruzione}$$

ovvero: "arresta la costruzione se l'ultimo intervallo calcolato è sufficientemente piccolo." Introducendo il criterio d'arresto descritto la procedura *Bisezione* si modifica in:

- $z = \textit{Bisezione}\,(f, a, b, \delta)$

  // $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$.

  $a_0 = a; b_0 = b; x_0 = (a_0 + b_0)/2;$

  `per` $k = 1, 2, \ldots$ `ripeti`:

      `se` $\big(f(x_{k-1}) = 0$ `oppure` $b_{k-1} - a_{k-1} < \delta\big)$ `allora` esci dal ciclo;

      `se` $f(x_{k-1})f(b_{k-1}) < 0$ `allora` $a_k = x_{k-1}; b_k = b_{k-1};$

      `se` $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ `allora` $a_k = a_{k-1}; b_k = x_{k-1};$

      $x_k = (a_k + b_k)/2;$

  $z = x_{k-1}$

Nell'esercitazione vedremo una *realizzazione* in *Scilab* della procedura descritta e un esempio di uso.

Esercizi

---

1. Sia $f(x) = 1/x$, definita per $x \neq 0$. La funzione è *continua* nel suo insieme di definizione e $f(-1) < 0$, $f(1) > 0$. Perché non possiamo concludere, in base al Teorema di esistenza degli zeri, che f ha almeno uno zero in $(-1, 1)$?
2. Sia $f(x) = x^3 - 2$.
   (1) Determinare analiticamente gli zeri di f.
   (2) Determinare $\textit{Bisezione}\,(f, 0, 2, \frac{1}{2})$.
3. Si consideri $\textit{Bisezione}\,(0, 10, 10^{-5})$. Se per ogni k si ha $f(x_{k-1}) \neq 0$, dopo quante iterazioni termina la costruzione delle successioni ?