Lezione 7

In questa lezione generalizzeremo quanto fatto nella lezione precedente per casi particolari, introducendo le nozioni di *algoritmo accurato*, *algoritmo stabile* e *calcolo ben condizionato*.

Siano β un numero intero maggiore o uguale a due, m un numero intero positivo, $M = F(\beta, m)$ l'insieme dei numeri di macchina del calcolatore in esame ed u la relativa precisione di macchina.

Chiameremo *algoritmo* una *sequenza finita di composizioni di funzioni predefinite*, eventualmente preceduta (la sequenza) da arrotondamenti. Esempi di algoritmo sono:

$$1 \oslash \mathtt{SQRT}(\mathrm{rd}(x)) \quad , \quad \mathtt{SQRT}(\mathrm{rd}(x)) \oslash \mathrm{rd}(x) \qquad \text{in entrambi } x \text{ è un numero reale positivo}$$

e:

$$\mathtt{SEN}(\mathrm{rd}(x)) \qquad \text{con } x \text{ numero reale}$$

Queste sono semplicemente *definizioni di funzioni* da $\Omega \subset \mathbb{R}$ in M. Ciascuno degli algoritmi che considereremo definisce una funzione da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in M^k (n, k numeri naturali). La nozione di algoritmo formalizza l'idea di funzione *calcolabile* dal calcolatore.

Sia f una funzione da $\Omega \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Salvo casi particolari, il calcolatore *non sa calcolare* $f(x)$ per nessun $x \in \Omega$. L'utilizzatore *sceglie* un algoritmo ϕ da Ω in M (dunque il calcolatore *sa calcolare* $\phi(x)$ per ogni $x \in \Omega$) da utilizzare per approssimare i valori di f. Per ogni $x \in \Omega$ si vuole studiare l'errore relativo commesso approssimando $f(x)$ con $\phi(x)$.

- *Definizione qualitativa* (algoritmo accurato, algoritmo stabile, calcolo ben condizionato).

  Siano f una funzione da $\Omega \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ϕ da Ω in M un algoritmo ed $x \in \Omega$ tale che $f(x) \neq 0$.

  – L'algoritmo ϕ è *accurato* quando utilizzato per approssimare f in x se, posto:

  $$\phi(x) = (1 + e)\, f(x) \qquad \text{ovvero} \qquad e = \frac{\phi(x) - f(x)}{f(x)}$$

  l'errore relativo e risulta "*piccolo*" (cioé: se $\phi(x)$ è una "*piccola*" perturbazione moltiplicativa di $f(x)$).

  – L'algoritmo ϕ è *stabile* quando utilizzato per approssimare f in x se: esistono $e_0, e_1 \in \mathbb{R}$ tali che:

  $$\phi(x) = (1 + e_0)\, f\big((1 + e_1)x\big)$$

  e gli errori relativi e_0 ed e_1 risultano "*piccoli*" (ovvero, se $\phi(x)$ è una "*piccola*" perturbazione moltiplicativa del valore di f in un punto "*vicino*" ad x).

  – Il calcolo di f in x è *ben condizionato* se: *per ogni* $e_1 \in \mathbb{R}$ "*piccolo*," posto:

  $$f\big((1 + e_1)x\big) = (1 + e_0)\, f(x) \qquad \text{ovvero} \qquad e_0 = \frac{f\big((1 + e_1)x\big) - f(x)}{f(x)}$$

  l'errore relativo e_0 risulta "*piccolo*" (cioè: se in *ogni* punto "*vicino*" ad x il valore di f è una "*piccola*" perturbazione moltiplicativa di $f(x)$).

  Le definizioni sono *qualitative* perché non si è dato un significato quantitativo al termine "piccolo" associato ai vari errori relativi. In ogni caso si richiede che se q_1 e q_2 sono quantità "piccole" allora posto $(1 + q_1)(1 + q_2) = (1 + t)$, ovvero $t = q_1 + q_2 + q_1 q_2$, la quantità t risulti a sua volta "piccola."

  Si osservi infine che:

  (1) Se $f(x) = 0$ e $\phi(x) \neq 0$ *non è possibile* interpretare $\phi(x)$ come perturbazione *moltiplicativa* di $f(x)$. In questo caso la nozione di *accuratezza* va definita interpretando $\phi(x)$ come perturbazione *additiva* di $f(x)$.

  (2) Se $x = 0$ la proprietà di *stabilità* coincide con quella di *accuratezza*. Per ottenere una nozione più utile la *stabilità* va riformulata introducendo una perturbazione *additiva* di x.

(3) Se x è uno zero isolato di f *non è possibile* interpretare $f\big((1+e_1)x\big)$ come perturbazione *moltiplicativa* di $f(x)$. In questo caso la nozione di *calcolo ben condizionato* va definita interpretando $f\big((1+e_1)x\big)$ come perturbazione *additiva* di $f(x)$.

Se $x = 0$ (e $f(0) \neq 0$) risulta $e_0 = 0$ ed il calcolo è ben condizionato quale che sia f. Anche in questo caso, per ottenere una nozione più utile, la definizione va riformulata introducendo una perturbazione *additiva* di x.

- *Teorema* (stabilità + buon condizionamento = accuratezza)

  Siano f una funzione da $\Omega \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ed $x \in \Omega$ tale che $x \neq 0$ e $f(x) \neq 0$. Sia infine ϕ da Ω in M l'algoritmo utilizzato per approssimare f in x.

  Se ϕ è *stabile ed* il calcolo di f in x è *ben condizionato*, allora ϕ è *accurato*.

  (Dim: Per la stabilità si ha: esistono $e_0, e_1 \in \mathbb{R}$ "piccoli" tali che:

  $$\phi(x) = (1+e_0)\, f\big((1+e_1)x\big)$$

  Poiché il calcolo di f in x è ben condizionato, posto:

  $$e_* = \frac{f\big((1+e_1)x\big) - f(x)}{f(x)} \qquad \text{ovvero} \qquad f\big((1+e_1)x\big) = (1+e_*)\, f(x)$$

  l'errore relativo e_* risulta "*piccolo.*" Si ottiene perciò:

  $$\phi(x) = (1+e_0)(1+e_*)f(x) = (1+\theta)f(x)$$

  con $\theta = e_0 + e_* + e_0 e_*$ che risulta "piccolo." Dunque l'algoritmo è accurato.)

- Esempi.

  (1) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $\phi(x) = \texttt{SEN(}\mathrm{rd}(x)\texttt{)}$.

  ∗ *Stabilità dell'algoritmo.*
  Per ogni numero reale x esistono numeri reali e_1, e_2 tali che:

  $$\phi(x) = (1+e_2)\operatorname{sen}\big((1+e_1)x\big) \qquad \text{con } |\, e_1\,| \leqslant u \text{ ed } |\, e_2\,| \leqslant u$$

  Considerando "piccola" la precisione di macchina, l'algoritmo verifica la definizione di stabilità *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

  ∗ *Condizionamento del calcolo.*
  Assegnata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si consideri la *funzione di condizionamento* del calcolo di f in x definita da:

  $$C(x,e) = \left|\, \frac{f\big((1+e)x\big) - f(x)}{f(x)} \,\right|$$

  Questa funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ che *non* sia zero di f e per ogni $e \in \mathbb{R}$.[1] Studiare il condizionamento del calcolo di f in x significa determinare, per x fissato ed e "piccolo," una *limitazione superiore* per $C(x,e)$ in termini di $|\, e\,|$.

  Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione *con derivata prima continua*, utilizzando il Teorema di Lagrange si ottiene: dati numeri reali x ed e *esiste* un numero reale θ compreso tra x ed $(1+e)x$ tale che:

  $$f\big((1+e)x\big) = f(x) + f'(\theta)\, ex$$

  dunque, se $f(x) \neq 0$, si ottiene:

  $$C(x,e) = \left|\, f'(\theta)\, \frac{x}{f(x)}\, e \,\right|$$

  Nel caso in esame la funzione di condizionamento è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ non multiplo intero di π ed ogni $e \in \mathbb{R}$. La funzione ha derivata prima continua e quindi:

  $$C(x,e) = \left|\, \cos\theta\, \frac{x}{\operatorname{sen} x}\, e \,\right| \qquad \text{con } \theta \text{ tra } x \text{ e } (1+e)x$$

[1] Se il dominio di f è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ l'insieme di definizione va opportunamente modificato.

§ *Esempio*

Per ogni x, e nel dominio:

$$C(x,e) \leqslant \left| \frac{x}{\operatorname{sen} x} \right| \, |\, e \,|$$

Per ogni $e \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to 0} C(x,e) = |\, e \,|$$

Per e "piccolo:"

$$\lim_{x \to \pi} C(x,e) = +\infty$$

§ *Esercizio*

Utilizzare *Scilab* per ottenere il (un'approssimazione del) grafico della funzione

$$\left| \frac{x}{\operatorname{sen} x} \right|$$

per $x \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Il calcolo di $\operatorname{sen} x$ risulta ragionevolmente ben condizionato (e quindi, per il Teorema precedente, l'algoritmo ϕ risulta *accurato*) ad esempio per $x \in (0, \pi - h) \cup (\pi + h, 2\pi - h)$ con h non troppo piccolo. Il calcolo, invece, *non è* ben condizionato ad esempio per x vicino a π. In quest'ultimo caso il Teorema citato non consente di concludere alcunché riguardo all'accuratezza dell'algoritmo (vedere l'Esercizio 3).

(2) $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $\phi(x) = 1 \oslash \texttt{SQRT(}\mathrm{rd}(x)\texttt{)}$ (entrambe definite per $x > 0$)

∗ *Stabilità dell'algoritmo.*

Per ogni numero reale $x > 0$ esistono numeri reali e_1, e_2 ed e_3 tali che:

$$\phi(x) = \frac{1 + e_3}{(1 + e_2)\sqrt{(1 + e_1)x}} \qquad \text{con } |\, e_1 \,| \leqslant u, |\, e_2 \,| \leqslant u \text{ ed } |\, e_3 \,| \leqslant u$$

e quindi:

$$\phi(x) = \frac{1 + e_3}{1 + e_2} \, f\big((1 + e_1)x\big) = (1 + t) f\big((1 + e_1)x\big) \quad \text{con } t = \frac{e_3 - e_2}{1 + e_2}$$

Utilizzando le limitazioni su e_2 ed e_3 si ottiene:

$$|\, t \,| \leqslant \frac{2u}{1 - u} \approx 2u$$

Considerando "piccola" la precisione di macchina, l'algoritmo verifica la definizione di stabilità *per ogni* $x > 0$.

∗ *Condizionamento del calcolo.*

La funzione ha derivata prima continua. Per ogni $x > 0$ ed ogni e tale che $(1+e)x > 0$ si ha allora:

$$C(x,e) = \left| -\frac{1}{2} \, \frac{x\sqrt{x}}{\theta\sqrt{\theta}} \, e \right| \qquad \text{con } \theta \text{ tra } x \text{ e } (1+e)x$$

Siamo interessati al caso $|\, e \,| \leqslant u$. In tal caso si ha: $(1-u)x \leqslant \theta \leqslant (1+u)x$ e quindi:

$$C(x,e) \leqslant \frac{1}{2} \, \frac{u}{(1 - u)\sqrt{1 - u}} \approx \tfrac{1}{2} u$$

Possiamo ritenere il calcolo di f *ben condizionato* per ogni $x > 0$.

In base a quanto ottenuto ed al Teorema precedente: l'algoritmo ϕ è *accurato* quando utilizzato per approssimare f, *per ogni* $x > 0$.

Esercizi

1. Sia $f(x) = \sqrt{x}/x$ (definita per $x > 0$). Determinare l'insieme di definizione e discutere l'accuratezza dell'algoritmo:
$$\phi(x) = \texttt{SQRT(}\mathrm{rd}(x)\texttt{)} \oslash \mathrm{rd}(x)$$
quando utilizzato per approssimare i valori di f.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima continua tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si abbia $|\, f'(x)\,| > L > 0$. Siano poi $\alpha \neq 0$ l'unico zero di f e $C(x, e)$ la funzione di condizionamento del calcolo di f in x. Per ogni $x \neq \alpha$ ed $e \in \mathbb{R}$ esiste θ tale che:
$$C(x, e) = \left| f'(\theta)\, \frac{x}{f(x)}\, e \right|$$
Mostrare che per ogni x, e del dominio si ha:
$$C(x, e) > L \left| \frac{x}{f(x)} \right| |\, e\,|$$
e dedurne che per ogni $e \neq 0$:
$$\lim_{x \to \alpha} C(x, e) = +\infty$$

3. Si consideri l'Esempio 1. Si ricordi che, in *Scilab*: $\texttt{\%pi} = \mathrm{rd}(\pi) < \pi$ e $\phi(\pi) = \texttt{SEN(\%pi)} > 0$.[2]
   (1) Mostrare che per ogni $x \in (\texttt{\%pi}, \pi)$ si ha $\mathrm{rd}(x) = \texttt{\%pi}$ e quindi $\phi(x) = \texttt{SEN(\%pi)}$.
   (2) Mostrare che, posto per ogni $x \in (\texttt{\%pi}, \pi)$:
   $$e(x) = \frac{\phi(x) - f(x)}{f(x)}$$
   si ha:
   $$\lim_{x \to \pi-} e(x) = +\infty$$
   ovvero: per x vicino a π l'algoritmo ϕ *non è accurato* quando utilizzato per approssimare $\mathrm{sen}\, x$.

[2] Vedere il *Dialogo 2* e l'Esercizio 5 della Lezione 6.