Lezione 6

In questa lezione discuteremo due *dialoghi* con *Scilab* alla luce del modello di calcolatore che abbiamo scelto.

- *Dialogo 1.*

```
-->A = 1 / sqrt(2)
 A  =

    0.7071068

-->B = sqrt(2) / 2
 B  =

    0.7071068

-->A == B
 ans  =

  F
```

L'intento dell'utilizzatore è, in entrambi i casi, quello di conoscere *un'approssimazione* di $\alpha = 1/\sqrt{2}$ (che *non* appartiene a $F(2,53)$). I due valori ottenuti sono *mostrati* identici ma il test finale dimostra che *non lo sono.* Vogliamo capire quale dei due valori sia preferibile usare per approssimare α.

In base al modello di calcolatore che abbiamo scelto, cerchiamo una *limitazione superiore* al valore assoluto dell'errore relativo commesso approssimando α con il valore di `A`. Affrontiamo il problema in *due passi.*

Sia `SQRT` la funzione predefinita corrispondente alla funzione elementare radice quadrata e u la precisione di macchina in $F(2,53)$.

  - *Primo passo*:
    Scilab assegna ad `A` il valore:
$$a = 1 \oslash \texttt{SQRT(2)}$$
    Si ha:
    * Poiché `SQRT(2)` $= \mathrm{rd}(\sqrt{2})$, esiste $e_1 \in \mathbb{R}$ tale che:
$$a = 1 \oslash \big(\sqrt{2}\,(1+e_1)\big) \qquad \text{con} \qquad |\,e_1\,| \leqslant u$$
    * Poiché per ogni $\xi_1, \xi_2 \in F(2,53)$ si ha $\xi_1 \oslash \xi_2 = \mathrm{rd}(\xi_1/\xi_2)$, esiste $e_2 \in \mathbb{R}$ tale che:
$$a = \frac{1+e_2}{\sqrt{2}\,(1+e_1)} \qquad \text{con} \qquad |\,e_2\,| \leqslant u$$
    * Infine, posto $f(x_1,x_2) = x_1/x_2$ si riscrive:
$$a = f\big(1+e_2, \sqrt{2}\,(1+e_1)\big) \qquad \text{e} \qquad \alpha = f(1,\sqrt{2})$$

    Siano giunti ad *rileggere* a ed α come *valori di una stessa funzione in punti vicini.* (*Esercizio*: mostrare che la distanza tra i due punti non supera $\sqrt{3}\,u$.)
  - *Secondo passo*:
    Affrontiamo il seguente problema: *dati* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tali che* $f(x_1,x_2) \neq 0$ *e* $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$ *con* $|\,\epsilon_2\,| < 1$, *determinare* $\epsilon \in \mathbb{R}$ *tale che*:
$$f\big(x_1\,(1+\epsilon_1), x_2\,(1+\epsilon_2)\big) = f(x_1,x_2)\,(1+\epsilon)$$

Si cerca ϵ tale che:

$$\frac{x_1\,(1+\epsilon_1)}{x_2\,(1+\epsilon_2)} = \frac{x_1}{x_2}\,(1+\epsilon)$$

ovvero tale che:

$$\frac{1+\epsilon_1}{1+\epsilon_2} = 1+\epsilon$$

Quest'ultima relazione determina *univocamente* ϵ:

$$\epsilon = \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{1+\epsilon_2}$$

Si ottiene allora:

$$a = f\big(1+e_2, \sqrt{2}\,(1+e_1)\big) = f(1,\sqrt{2})\left(1+\frac{e_2-e_1}{1+e_1}\right) = \alpha\left(1+\frac{e_2-e_1}{1+e_1}\right)$$

che equivale a:

$$\frac{a-\alpha}{\alpha} = \frac{e_2-e_1}{1+e_1}$$

Considerando le limitazioni $|\,e_1\,| \leqslant u$ e $|\,e_2\,| \leqslant u$ si ottiene infine:

$$\left|\,\frac{a-\alpha}{\alpha}\,\right| \leqslant \frac{2u}{1-u} \approx 2u$$

Dunque: *il valore assoluto dell'errore relativo commesso approssimando α con a non supera $2u$.*

Cerchiamo ora una limitazione superiore al valore assoluto dell'errore relativo commesso approssimando α con il valore di B. Procedendo come nel *primo passo* precedente si ottiene:

- *Scilab* assegna a `B` il valore:

$$b = \texttt{SQRT(2)} \oslash 2$$

- Con lo stesso e_1 del caso precedente si riscrive:

$$b = \big(\sqrt{2}\,(1+e_1)\big) \oslash 2 \qquad \text{con} \qquad |\,e_1\,| \leqslant u$$

- Poiché per ogni $\xi \in F(2,53)$ si ha $\xi \oslash 2 = \xi/2$ ('la divisione è esatta'), si ottiene:

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+e_1) = \alpha\,(1+e_1)$$

Quanto ottenuto equivale a:

$$\frac{b-\alpha}{\alpha} = e_1$$

Considerando la limitazione $|\,e_1\,| \leqslant u$ si ottiene infine:

$$\left|\,\frac{b-\alpha}{\alpha}\,\right| \leqslant u$$

Dunque: *il valore assoluto dell'errore relativo commesso approssimando α con B non supera u.*

L'analisi svolta *non consente* di sapere quale tra a e b sia migliore come approssimazione di α (non sappiamo in quale caso l'errore relativo commesso nell'approssimazione sia più piccolo) ma in base alle limitazioni ottenute: il massimo valore assoluto dell'errore relativo che si *rischia* di commettere è più piccolo usando b (u) piuttosto che a ($2u$).

- *Dialogo 2.*

```
-->x = sin(%pi)
 x  =

    1.225D-16
```

La stringa `%pi` è una *costante*[1] di *Scilab* di valore $\mathrm{rd}(\pi)$. In questo caso l'utilizzatore chiede a *Scilab* di assegnare alla variabile `x` il valore $\mathrm{sen}(\pi)$. In modo forse inatteso, *Scilab* assegna ad `x` un valore *diverso da zero*. Ci chiediamo se il modello di calcolatore che abbiamo scelto sia in grado di *spiegare* il comportamento di *Scilab*. Anche in questo caso affrontiamo il problema in due passi.

– *Primo passo*:
  Detta `SEN` la funzione predefinita corrispondente alla funzione elementare sen, l'interfaccia interpreta la stringa immessa dall'utilizzatore come la richiesta al nucleo interno di assegnare ad `x` il valore:

$$x = \mathtt{SEN}(\mathrm{rd}(\pi))$$

  Si ha:

  * Poiché `%pi` $= \mathrm{rd}(\pi)$, esiste $e_1 \in \mathbb{R}$ tale che:

$$x = \mathtt{SEN}(\pi\,(1+e_1)) \qquad \text{con} \qquad |\,e_1\,| \leqslant u$$

  * Poichè per ogni $\xi \in F(2,53)$ si ha: $\mathtt{SEN}(\xi) = \mathrm{rd}\big(\mathrm{sen}(\xi)\big)$, esiste $e_2 \in \mathbb{R}$ tale che:

$$x = (1+e_2)\ \mathrm{sen}\,\big(\pi\,(1+e_1)\big) \qquad \text{con} \qquad |\,e_2\,| \leqslant u$$

  Siamo giunti a *rileggere* x come *una piccola perturbazione moltiplicativa del valore della funzione elementare* sen *calcolata in un punto vicino a quello indicato dall'utilizzatore.* (*Esercizio*: mostrare che la distanza tra i due punti non supera πu.)

– *Secondo passo*:
  Affrontiamo il seguente problema: *dato* $\epsilon \in \mathbb{R}$*, determinare* $\delta \in \mathbb{R}$ *tale che*:

$$\mathrm{sen}\,\big(\pi\,(1+\epsilon)\big) = \mathrm{sen}(\pi) + \delta$$

  Si osservi che in questo caso non possiamo esprimere il valore della funzione sen in un punto vicino a π come *perturbazione moltiplicativa* del valore della funzione sen in π (perchè quest'ultimo valore è zero): ricorriamo ad una *perturbazione additiva.*
  La relazione richiesta determina *univocamente* δ:

$$\delta = \mathrm{sen}\,\big(\pi\,(1+\epsilon)\big) - \mathrm{sen}(\pi)$$

  La funzione sen è regolare: in base al *Teorema di Lagrange* esiste un numero reale θ compreso tra π e $\pi\,(1+\epsilon)$ tale che:

$$\delta = \mathrm{sen}\,\big(\pi\,(1+\epsilon)\big) - \mathrm{sen}(\pi) = \cos(\theta)\,\pi\epsilon$$

  Si osservi che *se* ϵ è piccolo, $\pi\,(1+\epsilon) \approx \pi$ e quindi: $\theta \approx \pi$ e $\cos(\theta) \approx \cos(\pi) = -1$.

Si ottiene allora:

$$x = (1+e_2)\,\Big(\,\mathrm{sen}(\pi) + \cos(\theta)\,e_1\pi\Big) = (1+e_2)\,\cos(\theta)\,e_1\pi$$

Considerando la limitazione $|\,e_1\,| \leqslant u$ si ha $\theta \approx \pi$ e:

$$x \approx -(1+e_2)\,e_1\pi$$

Poiché $\pi \notin F(2,53)$, si ha certamente $e_1 \neq 0$ e quindi $x \neq 0$. Inoltre, tenuto conto delle limitazioni su e_1 ed e_2 si ricava:

$$|\,-(1+e_2)\,e_1\pi\,| \leqslant (1+u)\,u\,\pi \approx u\,\pi \approx 3.48\,10^{-16}$$

In conclusione: il modello di calcolatore scelto *è in grado* di spiegare il comportamento di *Scilab* nel caso in esame.

[1] Il termine utilizzato in *Scilab* è *variabile predefinita.*

Esercizi

1. Cosa accade quando a *Scilab* si chiede di assegnare il valore 3 alla variabile `%pi`?

2. Nel secondo dialogo *Scilab* mostra il valore di `x` dopo l'assegnamento arrotondato nell'insieme dei numeri reali che ammettono, in base dieci, una scrittura composta di al più dieci simboli. Spiegare perchè, in base al valore mostrato, il valore effettivo di `x` *non può* essere zero.

3. Sia $\xi \in F(2,53)$. Dimostrare, utilizzando la definizione di pseudo-prodotto e le proprietà della funzione arrotondamento, che:

$$\xi \otimes \xi > 2 \qquad \Rightarrow \qquad |\,\xi\,| > \sqrt{2}$$

   Utilizzare *Scilab* per verificare che $\mathrm{rd}(\sqrt{2}) > \sqrt{2}$ e dedurne che $B > \alpha$.

4. Discutere il seguente dialogo con *Scilab*:

```
-->cos(%pi/2)
 ans  =

    6.123D-17
```

5. Nel *secondo dialogo Scilab* mostra l'arrotondato del valore di `x` nell'insieme dei numeri reali che, in base dieci, possono essere scritti utilizzando al più dieci simboli:

```
x = 1.225D-16
```

   (1) Dimostrare che il valore x di `x` è *positivo*.

   (2) Nella discussione del *secondo dialogo* si è ottenuto:

$$x = (1 + e_2)\,\cos(\theta)\,e_1\pi$$

   con $\theta \approx \pi$ e quindi $\cos(\theta) \approx -1$. Se $x > 0$ allora $e_1 < 0$. Dedurne che `%pi` $= \mathrm{rd}(\pi) < \pi$.[2]

[2] Si ha: `%pi` = 3.141592653589793115997963468544185161590576171875. Cercare su Wikipedia la parte iniziale della scrittura in base dieci di π e verificare il risultato.