Lezione 3

Siano β un numero intero maggiore o uguale a due ed m un numero intero positivo.

- *Proprietà di* $F(\beta, m) \subset \mathbb{R}$.
  - È un sottoinsieme *proprio* di $\mathbb{Q}$, infatti:
    - $\xi = \beta^b \, 0.c_1 \cdots c_m = \beta^{b-m} \, c_1 \cdots c_m \in \mathbb{Q}$
    - ad esempio, $\frac{1}{10} \notin F(2, m)$, $\frac{1}{3} \notin F(10, m)$
  - È *numerabile* ed *ordinato*;
  - È *simmetrico rispetto a zero*;
  - Zero è (l'unico) *punto di accumulazione*;
    - *Esercizio.* Determinare una successione $\xi_k \in F(\beta, m)$ tale che $\lim \xi_k = 0$.
  - $\sup F(\beta, m) = +\infty, \inf F(\beta, m) = -\infty$.
    - *Esercizio.* Determinare una successione $\xi_k \in F(\beta, m)$ tale che $\lim \xi_k = +\infty$.

- *Struttura geometrica di* $F(\beta, m)$.
  - *Esercizio.*

    Rappresentare sulla retta reale gli insiemi B_0 degli elementi positivi di $F(10, 1)$ con esponente 0, B_1 con esponente 1 e, infine, B_{-1} con esponente -1. Determinare la distanza tra due elementi consecutivi in B_0, in B_1 e in B_{-1}. Determinare infine la distanza tra $\max B_{-1}$ e $\min B_0$ e tra $\max B_0$ e $\min B_1$.

    In generale: dato $b \in \mathbb{Z}$ sia B_b l'insieme degli elementi positivi di $F(\beta, m)$ con esponente b; tale insieme è costituito, nel caso in esame, da 9 elementi e la distanza tra due elementi consecutivi è 10^{b-1}.
  - *Esercizio.*

    Si consideri $F(10, 3)$. Ricordando la definizione delle funzioni *successore* e *predecessore* (Lezione 2), determinare:
    - $\sigma(10^{-2} \, 0.501)$ e $\pi(10^{-2} \, 0.501)$
    - $\sigma(10^4 \, 0.100)$ e $\pi(10^4 \, 0.100)$
    - $\sigma(10^b \, 0.999)$ e $\pi(10^{b+1} \, 0.100)$
    - $\sigma(\max B_2)$ e $\pi(\min B_{-1})$
  - *Teorema* (distribuzione degli elementi di $F(\beta, m)$).

    Si consideri $F(\beta, m)$ e sia $\xi = \beta^b \, g$ un suo elemento *positivo*. Allora:

    $$\sigma(\xi) - \xi = \beta^{b-m} \qquad \text{e} \qquad \frac{\sigma(\xi) - \xi}{\beta^b} = \beta^{-m} \text{ (indipendente da } \xi\,!)$$

    (*Dim.* ...)
  - *Esercizio.*

    Dimostrare che $F(2, 2) \subset F(2, 3)$ e che $F(10, 1) \subset F(10, 2)$. In generale:

    $$n < m \qquad \Rightarrow \qquad F(\beta, n) \subset F(\beta, m)$$

    La relazione tra insiemi di numeri in virgola mobile *in basi diverse* è meno semplice: si veda l'Esercizio 4 della Lezione 1.

- Si consideri $F(2, 2)$. Ricordando la definizione di *funzione arrotondamento* in $F(2, 2)$ (Lezione 2), verificare che $\mathrm{rd}(\frac{1}{10}) = 2^{-3} \, 0.11 = \frac{3}{32}$. (Infatti ...)

- *Proprietà di* $\mathrm{rd} : \mathbb{R} \to F(\beta, m)$.
  - La funzione rd *non è invertibile*:

    - L'arrotondato di x in $F(10,3)$ è 0.3. Determinare il *più piccolo* intervallo che certamente include x.
  - La funzione rd è *dispari*: $\mathrm{rd}(-x) = -\mathrm{rd}(x)$;
    - Verificare aiutandosi con un disegno!
  - La funzione rd è *non decrescente*: $x < y \Rightarrow \mathrm{rd}(x) \leqslant \mathrm{rd}(y)$;
    - $10^0\,0.232 < 10^0\,0.234$ ma in $F(10,2)$ si ha $\mathrm{rd}(10^0\,0.232) = \mathrm{rd}(10^0\,0.234) = 0.23$ e quindi $\mathrm{rd}(10^0\,0.232) \leqslant \mathrm{rd}(10^0\,0.234)$.
  - $\mathrm{rd}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
    - Infatti: poiché zero è punto di accumulazione di $F(\beta, m)$, se $x \neq 0$ allora zero non può essere l'elemento di $F(\beta, m)$ più vicino ad x.
  - $\mathrm{rd}(x) = x \Leftrightarrow x \in F(\beta, m)$.

- *Funzionamento dell'interfaccia, caso elementare.*

  La funzione arrotondamento serve a descrivere il funzionamento dell'interfaccia utilizzatore/nucleo interno. In *Scilab* si ottiene:

```
-->x = 0.12345678
 x  =

    0.1234568
```

  L'istruzione inserita (`x = 0.12345678`) ha il seguente effetto: *se non esiste già, viene creata una variabile di nome* `x` *e ad essa viene assegnato valore* $\mathrm{rd}(0.12345678)$, *l'arrotondato di* 0.12345678 *in* $F(2, 53)$. Si osservi che la stringa '0.12345678' viene interpretata come la scrittura in base *dieci* di un numero reale.

  In risposta all'istruzione inserita, *Scilab mostra il valore di* `x` *arrotondato in un opportuno insieme di numeri reali che ammettono, in base dieci, una scrittura composta di al più dieci simboli.*[1]

Esercizi

---

1. Si consideri $F(2,3)$. Determinare:

$$\sigma(2^{-3}\,0.101) \quad , \quad \pi(2^{-3}\,0.101) \quad \text{e} \quad \sigma(2^4\,0.100) \quad , \quad \pi(2^4\,0.100)$$

   Determinare poi:

$$\sigma(2^{-1}\,0.110) \quad , \quad \pi(-2^{-1}\,0.101)$$

   e verificare che $\pi(-2^{-1}\,0.101) = -\sigma(2^{-1}\,0.101)$. Dedurne che

$$\textit{per ogni } \xi \textit{ elemento non nullo di } F(\beta, m) \textit{ si ha: } \pi(-\xi) = -\sigma(\xi)$$

   Determinare infine:

$$\max B_{-2} \quad \text{e} \quad \min B_7$$

2. Sia ϕ la funzione definita, per ogni elemento non nullo di $F(\beta, m)$, da $\phi(\xi) = \sigma(\xi) - \xi$. Mostrare che per ogni ξ si ha $\phi(\xi) \in F(\beta, m)$. Discutere la monotonia della funzione ϕ.

3. Calcolare l'arrotondato di $\frac{1}{4}$ in $F(3,2)$.

4. Sia $\xi = 3^b\,0.c_1c_2c_3 \in F(3,3)$. Detto m il punto medio del segmento di estremi ξ e $\sigma(\xi)$, mostrare (aiutandosi con la rappresentazione grafica di tutti i numeri considerati) che:

$$3^b\,0.c_1c_2c_3 1 < m < 3^b\,0.c_1c_2c_3 2 \quad , \quad 3^b\,0.c_1c_2c_3 11 < m < 3^b\,0.c_1c_2c_3 12 \quad , \quad \ldots$$

   e quindi che:

$$m = 3^b\,0.c_1c_2c_3\bar{1}$$

[1] Per qualche dettaglio in più, si vedano gli appunti relativi all'Esercitazione 1.

5. Calcolare l'arrotondato di $2^{-3}\,0.1011$ in $F(10, 2)$.

6. Si consideri il seguente *dialogo* in *Scilab*:

```
-->x = 0.1
 x  =

    0.1

-->x == 0.1
 ans  =

  T
```

È vero che la variabile `x` ha valore *un decimo* ? Spiegare il dialogo riportato.