Lezione 1

0 Funzionalità matematiche (modello) del calcolatore

Un calcolatore è un dispositivo *programmabile* di calcolo. Il principale calcolo che ci interessa è quello del *valore di una funzione in un punto*. Ad esempio, in *Scilab* si ottiene:

```
-->sin(86.3)
 ans  =

    -0.9956042
```

usando la calcolatrice tascabile *HP 49G* si ottiene invece: `sin(86.3) = -0.995604194361`.

Il calcolatore va pensato come costituito da un *nucleo interno* ed una *interfaccia* tramite la quale l'utilizzatore interagisce con il nucleo interno. Il nucleo interno è caratterizzato da *due* insiemi:

(A) l'insieme dei *numeri di macchina*

(B) l'insieme delle *funzioni predefinite*

I numeri di macchina sono i numeri che il nucleo interno sa manipolare, le funzioni predefinite sono le operazioni che il nucleo interno sa fare con i numeri di macchina.

(A) Numeri di macchina

- *Definizione* (esponente e frazione di un numero reale non nullo)

  Siano x un numero reale *diverso da zero* e β un numero intero maggiore o uguale a due. È *univocamente determinato* un numero intero b tale che, posto:

  $$g = \frac{|\,x\,|}{\beta^b}$$

  si ha:

  $$\frac{1}{\beta} \leqslant g < 1$$

  ovvero: esiste *un solo modo* di scrivere x nella forma:

  $$x = (-1)^s\,\beta^b\,g \qquad \text{con} \qquad s \in \{\,0,1\,\} \quad , \quad b \in \mathbb{Z} \quad , \quad \frac{1}{\beta} \leqslant g < 1$$

  s è il *segno* di x, b e g – che *dipendono da* β – sono, rispettivamente, l'*esponente* e la *frazione* di x.

  – *Dimostrazione*: Sia b l'unico numero intero tale che $\beta^{b-1} \leqslant |\,x\,| < \beta^b$. Allora:

  $$\beta^{-1} \leqslant \frac{|\,x\,|}{\beta^b} < 1$$

  – *Esempi*:

  $$x = \sqrt{5},\ \beta = 10 \quad \Rightarrow \quad s = 0,\ b = 1,\ g = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

  $$x = \sqrt{5},\ \beta = 2 \quad \Rightarrow \quad s = 0,\ b = 2,\ g = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

- La condizione $\dfrac{1}{\beta} \leqslant g < 1$ è equivalente a:

  la scrittura posizionale di g in base β ha la forma $0.c_1c_2\cdots$ con $c_1 \neq 0$

– *Esempi*:

$$x = \frac{1}{10},\ \beta = 10 \quad \Rightarrow \quad s = 0,\ b = 0,\ g = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$x = \frac{1}{10},\ \beta = 2 \quad \Rightarrow \quad s = 0,\ b = -3,\ g = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0.\overline{1100}$$

Nel primo esempio la scrittura posizionale di g in base dieci ha *lunghezza uno*; nel secondo esempio la scrittura posizionale di g in base due ha *lunghezza infinita*.

- *Definizione*: (numeri in virgola mobile, precisione)
  Siano β un numero intero maggiore o uguale a due ed m un numero intero positivo. L'insieme:

$$F(\beta, m) = \{\,0\,\} \cup \Big\{ x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x = (-1)^s \,\beta^b \, 0.c_1 \cdots c_m$$
$$\text{con } s \in \{\,0, 1\,\}, b \in \mathbb{Z}, c_1, \ldots, c_m \in \{\,0, \ldots, \beta - 1\,\} \text{ e } c_1 \neq 0 \Big\}$$

si chiama *insieme dei numeri in virgola mobile e precisione m in base β*.

  – *Esempio*: Sia $M = F(10, 1)$.
    * $x = 1/100 \in M$ perchè $x = 10^{-1}\,0.1$
    * $x = 11/100 \notin M$ perchè $x = 10^0\,0.11$ e la frazione *non è compatibile* con la precisione
    * Tutti gli elementi positivi di M con esponente zero sono:

$$\{\,0.1\,,\ 0.2\,, \ldots,\ 0.9\,\} = B$$

    * Tutti gli elementi positivi di M con esponente b sono:

$$\{\,10^b\,0.1\,,\ 10^b\,0.2\,, \ldots,\ 10^b\,0.9\,\} = 10^b\,B$$

    * Se $b_1 < b_2$ allora $\max 10^{b_1} B < \min 10^{b_2} B$
    * Tutti gli elementi negativi di M con esponente b sono:

$$\{\,-10^b\,0.1\,,\ -10^b\,0.2\,, \ldots,\ -10^b\,0.9\,\} = -10^b\,B$$

    * Si ha: $M = [\cup_{b\in\mathbb{Z}}(-10^b)B] \cup \{\,0\,\} \cup [\cup_{b\in\mathbb{Z}} 10^b B]$
    * M ha infiniti elementi.

Esercizi

---

1. Determinare l'esponente e la frazione di $x = \frac{2}{5}$ in base tre.
2. Sia $M = F(2, 3)$. Indicare quali dei seguenti numeri appartengono ad M :

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_3 = -\frac{1}{16} \quad , \quad x_4 = \frac{3}{16} \quad , \quad x_5 = 0$$

3. Sia $M = F(10, 3)$. Determinare il numero di elementi dell'insieme:

$$\{\,\xi \in M \text{ tali che } -10^{-6}\,0.311 \leqslant \xi \leqslant -10^{-9}\,0.581\,\}$$

4. Siano M_2 un insieme di numeri in virgola mobile e base due e M_{10} un insieme di numeri in virgola mobile e base dieci.
   (a) Mostrare che $\frac{1}{10} \in M_{10}$ ma $\frac{1}{10} \notin M_2$, e dedurne che sono falsi gli asserti $M_2 \supset M_{10}$ e $M_2 = M_{10}$.
   (b) Mostrare che *per ogni intero positivo k, 2^k non è divisibile per* 10 (e quindi che la cifra delle unità dell'espansione decimale di 2^k è sempre non zero) e che *per ogni intero positivo n esiste k tale che* $2^k > 10^n$; questi due asserti provano che per k sufficientemente grande si ha $2^k \notin M_{10}$, e quindi che è falso anche l'asserto $M_2 \subset M_{10}$.

5. Sia $M = F(2,4)$. Mostrare che tutti gli elementi positivi di M con esponente maggiore o uguale a 4 sono interi, e poi determinare:

$$\max\{\,\xi \in M \text{ tali che } \xi > 0 \text{ e } \xi \notin \mathbb{Z}\,\} \quad \text{e} \quad \min\{\,\alpha \in \mathbb{N} \text{ tali che } \alpha \notin M\,\}$$

6. Sia $M = F(\beta, m)$ e siano $\phi, \psi : M \setminus \{\,0\,\} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$\phi(\xi) = \text{esponente di } \xi \quad , \quad \psi(\xi) = \text{frazione di } \xi$$

   Mostrare che per ogni elemento non nullo $\xi \in M$ si ha $\psi(\xi) \in M$, ma che ϕ non ha la stessa proprietà. Per ciascuna di tali funzioni, decidere se è monotona.

7. Sia $M = F(2,4)$. Posto $\xi = 2^{-3}\, 0.1101 \in M$, indicare per quali numeri interi n si ha $4^n\, \xi \in M$.

8. Sia $x = 3.7$ (scrittura in base dieci). Decidere se $x \in F(2,8)$.

9. Quanti sono gli elementi positivi di $F(2,10)$ con esponente -6?