<u>def</u> (funz che meglio approssima i dati nel senso dei m.q.)

<u>dati</u>: $(x_0,y_0),\dots,(x_k,y_k)$, $\mathcal{F}$ s.s.v di $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ di dim <u>finita</u>;

g è un elem di $\mathcal{F}$ che meglio approssima i dati nel senso dei m.q se:

$$\forall \tilde{g}\in\mathcal{F},\ (\tilde{g}(x_0)-y_0)^2+\dots+(\tilde{g}(x_k)-y_k)^2 \geq (g(x_0)-y_0)^2+\dots+(g(x_k)-y_k)^2$$

<u>Es</u>: determ la migliori appross dei dati

$$(0,1),\ (0,-1),\ (1,-1),\ (-1,0)$$

nell'ins span$\{1, 2^t\}$ nel senso dei m.q

<u>Sol</u>: Cerco $g(t)$ della forma $g(t) = a_0 + a_1 2^t$

che rende minimo lo SCARTO QUADRATICO:

$$(g(0)-1)^2+(g(0)+1)^2+(g(1)+1)^2+(g(-1)-0)^2$$

sostituendo e riscrivendo:

$$(g(0)-1)^2+(g(0)+1)^2+(g(1)+1)^2+(g(-1)-0)^2 =$$

$$= (a_0+a_1-1)^2+(a_0+a_1+1)^2+(a_0+2a_1+1)^2+$$

$$+\left(a_0+\tfrac{1}{2}a_1-0\right)^2 = \left\| \begin{bmatrix} a_0+a_1-1 \\ a_0+a_1+1 \\ a_0+2a_1+1 \\ a_0+\frac{1}{2}a_1-0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 =$$

$$= \left\| a_0\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + a_1\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1/2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{bmatrix} \right\|_2^2$$

Posto $W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1/2\end{bmatrix}\right\}$ e $v = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{bmatrix}$, si

cercano le coord della migliore approx di v in W, nel senso dei m.q, rispetto ai generatori.

Per determinarle usiamo le eq.ni normali:

$$\begin{bmatrix} 4 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{25}{4} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

la matr è invert (i gen di W sono lin indip) e quindi $\exists!$ soluzione: $x = \frac{1}{19}\begin{bmatrix}11\\-14\end{bmatrix}$.

Allora $\exists!$ elem di span$\{1,2^t\}$ che rende minimo lo scarto quadratico:

$$g(t) = \frac{11}{19} - \frac{14}{19}2^t$$

<u>OSS</u>: Posto $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{bmatrix}$ lo scarto quadratico si riscrive:

$$\left\| A\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix} - b \right\|_2^2$$

$\Rightarrow$ i valori di a_0, a_1 che individuano le migliori appross dei dati nel senso dei m.q sono le soluz di $Ax=b$ nel senso dei m.q.

In generale: dato $\mathcal{F} = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_J(x)\}$ ssv di $C^0([a,b])$, i coeff delle comb lin di $f_1, \dots, f_J$ migliori appross dei dati $(x_0, y_0), \dots, (x_K, y_K)$ nel senso dei m.q sono le soluz nel senso dei m.q del sistema

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0) & \cdots & f_J(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_K) & \cdots & f_J(x_K) \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix}$$

ovvero del sistema che traduce le condiz di interpolazione.

<u>Es</u>: det gli elem di $\text{span}\{1, \sin x, \cos x\}$ che meglio approssimano i dati

$$(0,1), (0,-1), (\pi, 0), \left(\tfrac{\pi}{2}, 1\right), \left(\tfrac{3}{2}\pi, -1\right)$$

nel senso dei m.q.

<u>Sol</u>. ...