def: $A \in \mathbb{R}^{n \times j}$, $n > j$, $b \in \mathbb{R}^n$;
$v \in \mathbb{R}^j$ SOLUZIONE di $Ax = b$ NEL SENSO DEI MINIMI QUADRATI se
$\forall w \in \mathbb{R}^j$, $\| Aw - b \|_2 \geq \| Av - b \|_2$ (ovvero: $\| \dots \|_2^2 \geq \| \dots \|_2^2$)

Oss: $x^* \in \mathbb{R}^j$ è SOLUZIONE di $Ax = b$ significa $Ax^* - b = 0$;
dunque: SOLUZIONE $\Rightarrow$ SOLUZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI

Oss: $A = (a_1, \dots, a_j) \in \mathbb{R}^{n \times j}$, $n \geq j$, $b \in \mathbb{R}^n$

- $V = \mathbb{R}^n$ con ps canonico, $v = b$
- $W = \langle a_1, \dots, a_j \rangle \subset \mathbb{R}^n$
- l'elemento di W migliore approx di $v = b$ nel senso dei m.q. è la pr ort di b su W
- le coord della pr ort di b su W sono tutte le colonne soluz del sist delle eq normali:

$$(A^T A) x = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & \cdots & a_j \cdot a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 \cdot a_j & \cdots & a_j \cdot a_j \end{bmatrix} \qquad A^T b = \begin{bmatrix} b \cdot a_1 \\ \vdots \\ b \cdot a_j \end{bmatrix}$$

RICORDARE che: $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \cdot b = b^T a$

- la matr $A^T A$ è simmetrica semidef positiva ($\forall v \in \mathbb{R}^j$, $A^T A v \cdot v \geq 0$)
- SE colonne di A lin indip ALLORA è def positiva ($\Rightarrow$ invertibile)

Oss (pseudoinversa):

$A \in \mathbb{R}^{n \times j}$, $n \geq j$, $b \in \mathbb{R}^n$
$= (a_1, \dots, a_j)$, colonne lin indip.

- LA soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei m.q. è

$$x^* = \boxed{(A^T A)^{-1} A^T} b$$

PSEUDOINVERSA di A (A^+) $\in \mathbb{R}^{j \times n}$

- SE $n = k$ si ha $A^+ = A^{-1}$
- LA proiez ortogonale di b su $\langle a_1, \dots, a_j \rangle$ è $Ax^* = AA^+ b$

---

def (fatt QR, caso rettangolare):

fatt QR di $A \in \mathbb{R}^{n \times j}$ è (U, T) t.c.

- $U \in \mathbb{R}^{n \times j}$ a colonne ortonormali risp ps canonico in $\mathbb{R}^n$
- $T \in \mathbb{R}^{j \times j}$ tr sup
- $A = UT$

Si determina come nel caso quadrato.

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n \times j}$ a colonne lin indip, $b \in \mathbb{R}^n$, U, T fatt QR di A.

- colonne di A lin indip $\Rightarrow$ T invertibile (dim: per ass.)
- eq normali per il sist $Ax = b$:

$$\begin{cases} A^T A = T^T U^T U T = T^T T \\ A^T b = T^T U^T b \end{cases} \qquad T^T T x = T^T U^T b$$

MA T^T invertibile $\Rightarrow$ $\boxed{Tx = U^T b}$

• si ha: $c_2(A^TA) = (c_2(T))^2$ [dim: no]

OVVERO: i sist $A^TA\,x = A^Tb$ (eq normali)

e $Tx = U^Tb$

sono equivalenti, ma la matrice del secondo (è triangolare ed) ha numero di condizionam (quasi) sempre minore del primo!

Per l'ESERCITAZIONE vedere la sezione
'altro materiale didattico' sulla pagina web.