<u>def</u> (migliore appross in spazi con p s):

- V sp vett su $\mathbb{R}$ con p s ; $\forall v \in V$, $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$
- W ssv di V con $\dim W < +\infty$
- $v \in V$

$w \in W$ è una migliore appross di v in W se: $\forall w' \in W$, $\|v - w\| \leq \|v - w'\|$

<u>Oss</u>: def equivalente:

$$\forall w' \in W, \quad \|v - w\|^2 \leq \|v - w'\|^2$$

<u>TEO</u>: V, W, v come nella def; esiste <u>una sola</u> migliore appross di v in W: <u>la proiez ortogonale</u> di v su W.

<u>Oss</u>: v^* è pr ort di v su W <u>significa</u> $v - v^* \perp W$
ovvero: $\forall w \in W$, $(v - v^*) \cdot w = 0$.

<u>TEO</u>: V, W, v come nella def; esiste una sola pr ort di v su W.
(<u>dim</u>: vedere Oss. successiva.)

<u>dim</u>: v^* pr ort di v su W, $w' \in W$:

$$\|v - w'\|^2 = \|\underbrace{v - v^*}_{\perp W} + \underbrace{v^* - w'}_{\in W}\|^2 = \|v - v^*\|^2 + \|v^* - w'\|^2$$

<u>Oss</u>: $a \in W$, $b \perp W \Rightarrow \|a+b\|^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a \cdot a + \cancel{a \cdot b} + \cancel{b \cdot a} + b \cdot b = \|a\|^2 + \|b\|^2$ (Teo di Pitagora)

da cui:

- $\forall w' \in W$, $\|v - w'\|^2 \geq \|v - v^*\|^2$
- $\|v - w'\|^2 = \|v - v^*\|^2 \Leftrightarrow w' = v^*$

<u>Oss</u>: V, v come sopra, $W = \langle w_1, \dots, w_j \rangle$ s.s.v di V.

- v^* pr ort di v su $W \Leftrightarrow v - v^* \perp W$
  ovvero $\Leftrightarrow \forall s = 1, \dots, j$: $(v - v^*) \cdot w_s = 0$ cioè: $v^* \cdot w_s = v \cdot w_s$

• le coord di v^* sono dunque individuate da: $a_1 w_1 + \dots + a_j w_j = v^* \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix}$ soluz del sist $\underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \cdot w_1 & \cdots & w_j \cdot w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ w_1 \cdot w_j & \cdots & w_j \cdot w_j \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} v \cdot w_1 \\ \vdots \\ v \cdot w_j \end{bmatrix}}_{\text{EQUAZIONI NORMALI}}$ <u>Oss</u>: la matr del sist è SIMMETRICA.

- (dim dell' $\exists!$ della pr ort) <u>se</u> $w_1, \dots, w_j$ è base on di W <u>allora</u> le eq normali diventano:

$$x = \begin{bmatrix} v \cdot w_1 \\ \vdots \\ v \cdot w_j \end{bmatrix}$$

ovvero $\exists!$ $a_1, \dots, a_j$ t.c. $a_1 w_1 + \dots + a_j w_j$ è pr ort di v su W.

- <u>se</u> $w_1, \dots, w_j$ è base <u>allora</u> la matr dei coeff delle eq normali è <u>invertibile</u>.
- <u>se</u> $w_1, \dots, w_j$ lin dip <u>allora</u>: la matr dei coeff delle eq normali è <u>non invertibile</u> (e) il sist ha infinite soluzioni.

Es: ① $V = \mathbb{R}^4$ con ps canonico

$W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$ (dim $W = 1$)

$\qquad\qquad\quad w_1 \qquad w_2$

$v = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}$;

(A) $w_1 \cdot w_1 = 2$; $w_1 \cdot w_2 = 4$ | $v \cdot w_1 = 1$

$w_2 \cdot w_2 = 8$ | $v \cdot w_2 = 2$

(B) Eq normali: $\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 4\\4 & 8\end{bmatrix}}_{F} x = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}_{c}$

- $\det F = 0$, $\text{rk}\, F = 1$, $\text{rk}(F,c) = 1$, $\ker F = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \right\}$
- soluz $= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \ker F = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- $\forall \lambda$: $\left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right) w_1 + (-\lambda)\, w_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} + 2\lambda - 2\lambda\\ \frac{1}{2} + 2\lambda - 2\lambda\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ L'elem di W che meglio appross v nel senso dei mq è $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$.

---

② Per casa: $V = \mathbb{R}^4$ con ps canonico

$W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$ (dim $W = 1$)

$v = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}$;

determ la migl approx di v in W nel senso dei mq e confrontare il ris con quello dell' Es ①.

③ $V = \mathcal{C}^0([0, 2\pi])$, $f \cdot g = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$

$W = \text{span}\{1, \text{sen}\, t, \cos t\}$ (dim $W = 3$)

(A) $1 \cdot 1 = 2$; $1 \cdot \text{sen}\, t = 0$; $1 \cdot \cos t = 0$

$\text{sen}\, t \cdot \text{sen}\, t = 1$; $\text{sen}\, t \cdot \cos t = 0$

$\cos t \cdot \cos t = 1$

(B) Eq.ni normali: Es: $v = t^2$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}v \cdot 1\\ v \cdot \text{sen}\, t\\ v \cdot \cos t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{8}{3}\pi^2\\ -4\pi\\ 4\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ L'elem di $\text{span}\{1, \text{sen}\, t, \cos t\}$ che meglio appross t^2 nel senso dei mq

(ovvero che minimizza $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (t^2 - g(t))^2\, dt$)

è: $\frac{4}{3}\pi^2 - 4\pi\, \text{sen}\, t + 4 \cos t$.

Es (per casa): quali sono i primi tre termini dello sv in SERIE di FOURIER di $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ def da $f(t) = t^2$?