(A1) $S(t_0,\dots,t_k)$ è sottosp vett di $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (dim ...)

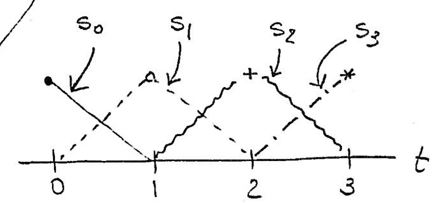
(B) $\forall\, y_0,\dots,y_k \in \mathbb{R}$, $\exists$ un solo elem di $S(t_0,\dots,t_k)$ che interpola i dati $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$

[dim: $\forall j\ \exists!\ p_j \in P_1(\mathbb{R})$ che interpola $(t_{j-1},y_{j-1}),(t_j,y_j)$, e la f risulta cont su $[a,b]$.]

(A2) $\dim S(t_0,\dots,t_k) = k+1$

- $s_0,\dots,s_k \in S(t_0,\dots,t_k)$ t.c. $s_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$
- $s_0,\dots,s_k$ sono base di $S(t_0,\dots,t_k)$ (dim ...)
- $\Rightarrow \dim S(t_0,\dots,t_k) = k+1$

Es: $[0,3]$; $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=2$, $t_3=3$



- determ $\sigma \in S$ che int i dati $(0,2),(1,-6),(2,0),(3,-1)$.

$[a,b]$, $a=t_0,\dots,t_k=b$, $S(t_0,\dots,t_k)$ f cont lin a tratti sugli int ...

- $r: \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ t.c. $r: \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \to$ l'elem di $S(t_0,\dots,t_k)$ che int $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$

(1) r è f di ricostr rel a c (dim ...)

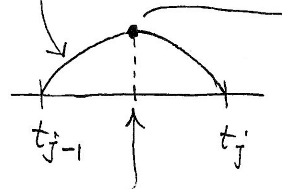
(2) $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, $M_2 = \max\{\,|f^{(2)}(t)|,\ t\in[a,b]\,\}$.

$\forall t \in [t_{j-1},t_j]$: $|f(t) - r(c(f))(t)| = |f(t) - p_j(t)| \leq$ usando teo err ricostr int polinomiale

l'elem di $P_1(\mathbb{R})$ che int $(t_{j-1}, f(t_{j-1})), (t_j, f(t_j))$

$$\leq \frac{M_2}{2}\,|t-t_{j-1}|\,|t-t_j| \leq \frac{M_2}{2}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{2}\right)^2$$

$\dfrac{t_{j-1}+t_j}{2}$



$\Rightarrow$ posto $h_k = \max\{t_1-t_0, t_2-t_1,\dots,t_k-t_{k-1}\}$

si ha: $\boxed{e(f) \leq \frac{M_2}{8} h_k^2}$

$\forall f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$: se strategia di scelta degli ist di camp è t.c. $\lim_{k\to\infty} h(k) = 0$ allora $\lim_{k\to\infty} e(f) = 0$

Es:
- $t_j = a + \frac{b-a}{k} j$, $j=0,\dots,k$

  $h(k) = \frac{b-a}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} h(k) = 0$
- $[a,b]=[0,1]$, $t_j = \frac{j}{j+1}$, $j=0,\dots,k-1$, $t_k=1$

  $h(k) = 1/2 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} h(k) \neq 0$

Oss (condiz del pb della ricostruzione):

$[a,b]$; $t_0,\dots,t_k$; $f:[a,b]\to\mathbb{R}$; $t_0,\dots,t_k$; c f di camp;

r f di ricostr; $\delta_0,\dots,\delta_k \in \mathbb{R}$; $\hat{r} = r(c(f)+\delta)$

- $|r(\delta)| = |\delta_0 s_0(t) + \dots + \delta_k s_k(t)| \leq |\delta_0|\,|s_0(t)| + \dots + |\delta_k|\,|s_k(t)|$

  $\leq \max\{|\delta_0|,\dots,|\delta_k|\}$

$|s_0(t)| + \dots + |s_k(t)| = s_0(t) + \dots + s_k(t) = 1$

4 APPROSSIMAZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI

def (funz che meglio approssima i dati nel senso dei m.q.)

dati: $(x_0,y_0),\dots,(x_k,y_k)$, G s.s.v di $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ di dim finita;

$g \in G$ è un elem di G che meglio approssima i dati nel senso dei m.q se:

$$\forall \tilde{g} \in G,\quad (\tilde{g}(x_0)-y_0)^2+\dots+(\tilde{g}(x_k)-y_k)^2 \geq (g(x_0)-y_0)^2+\dots+(g(x_k)-y_k)^2$$

def: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n > m$, $b \in \mathbb{R}^n$;

$v \in \mathbb{R}^m$ SOLUZIONE di $Ax=b$ NEL SENSO DEI MINIMI QUADRATI se

$$\forall w \in \mathbb{R}^m,\quad \|Aw-b\|_2 \geq \|Av-b\|_2 \quad (\text{ovvero: } \|\dots\|_2^2 \geq \|\dots\|_2^2)$$

def (migliore appross in spazi con ps):

- V sp vett su $\mathbb{R}$ con ps; $\forall v \in V$, $\|v\| = \sqrt{v\cdot v}$
- W ssv di V con $\dim W < +\infty$
- $v \in V$

$w \in W$ è una migliore appross di v in W se:

$$\forall w' \in W,\quad \|v-w\| \leq \|v-w'\|$$