Es (ricostruz mediante interp poli):

$r: \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ t.c. $r: \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \to$ l'elem di $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ che int i dati $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$

- r è f. di ricostruz rel a c

dim: (1) r è LINEARE: utilizz la f di Lagrange del p interp si constata che $\forall y', y'' \in \mathbb{R}^{k+1}$

$$r(y'+y'') = (y_0'+y_0'')\,\ell_{0k}(t)+\dots+(y_k'+y_k'')\,\ell_{kk}(t)$$
$$= y_0'\,\ell_{0k}(t)+\dots+y_k'\,\ell_{kk}(t) \; +$$
$$+\; y_0''\,\ell_{0k}(t)+\dots+y_k''\,\ell_{kk}(t)$$
$$= r(y')+r(y'')$$

Analogam si constata che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{k+1}$

$$r(\alpha y) = \alpha\, r(y)$$

(2) Per $y \in \mathbb{R}^{k+1}$ si ha

$$c(r(y)) = (p(t_0),\dots,p(t_k))^T = y$$

TEO (errore di ricostr dell'int polinomiale)

k int ≥ 0; $t_0,\dots,t_k \in [a,b]$, distinti;
$f \in \mathcal{C}^{k+1}([a,b],\mathbb{R})$; $p_k \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ che int. i dati $(t_j, f(t_j))$

$\forall t \in [a,b]$, $\exists \theta \in [a,b]$ t.c.

$$f(t) - p_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}(t-t_0)\cdots(t-t_k)$$

(dim: no. I curiosi possono consultare gli Appunti 2011-2012, reperibili sulle pagine web nella sezione "altro materiale didattico": Teo 4.12 a p. 109.)

Es: $[a,b]=[0,1]$, $f(t) = e^{-t}$

- $\forall j$ intero positivo, $\max\{|f^{(j)}(t)|,\ t\in[0,1]\} = 1$
- $\forall \tau \in [0,1]$, $|t-\tau| \leq 1$

$$\Rightarrow\ e(f) = \max_{t\in[0,1]} |f(t)-p_k(t)| =$$
$$= \max_{t\in[0,1]} \frac{|f^{(k+1)}(\theta)|}{(k+1)!}|t-t_0|\cdots|t-t_k|$$
$$\leq \frac{1}{(k+1)!}1^{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\text{e}\ \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(k+1)!} = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} e(f) = 0$$

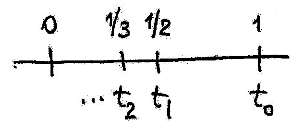
Es: $[a,b]=[0,2\pi]$; $f(t) = \sin\omega t$, $\omega > 0$

- $\forall j$ int positivo, $\max\{|f^{(j)}(t)|,\ t\in[0,2\pi]\} = \omega^j$
- $\forall \tau \in [0,2\pi]$, $|t-\tau| \leq 2\pi$

$$\Rightarrow\ e(f) \leq \frac{\omega^{k+1}}{(k+1)!}(2\pi)^{k+1} \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty}\frac{(2\pi\omega)^{k+1}}{(k+1)!} = 0$$

OVVERO: $\boxed{\text{l'errore di ricostruz può essere reso arb piccolo scegliendo suff grande il \# di ist di campionam; l'unico vincolo sugli ist di camp è che siano distinti.}}$

Es: $[a,b]=[0,1]$; $f(t)=\begin{cases} t \,\text{sen}\,\frac{\pi}{t} & \text{per } t\neq 0 \\ 0 & \text{per } t=0 \end{cases}$

- $t_j = \dfrac{1}{j+1}$, $j=0,1,2,\dots$ ()

- $f(t_j) = \dfrac{1}{j+1}\,\text{sen}\big[(j+1)\pi\big] = 0 \;\Rightarrow$ dati da interp: $(t_0,0),(t_1,0),\dots$

  $\Rightarrow \forall$ f di ricostr r : $r\big(c(f)\big)=0$.

Q.di : $e(f) = \max\{\,|f(t)|,\ t\in[0,1]\,\} > 0$ INDIP da k

OVVERO: $\boxed{\exists \text{ funz e strategie di scelta degli ist di camp t.c. } \lim_{k\to\infty} e(f) \neq 0 .}$

Oss: in generale....

$\boxed{\text{Es: } \dots < L^j,\ L>0}$

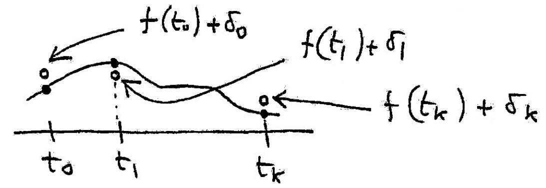
- se $\max\{\,|f^{(j)}(t)|,\ t\in[a,b]\,\}$ non cresce troppo rapidam con j allora $\lim_{k\to\infty} e(f)=0$ con qualsiasi strategia di scelta dei c.
- $\forall$ f continua, $\exists$ strategia di scelta dei t_j t.c. $\lim_{k\to\infty} e(f)=0$ [... ma QUALE ?];
- $\forall$ strategia di scelta dei t_j, $\exists$ f continua t.c. $\lim_{k\to\infty} e(f)\neq 0$.

$\boxed{\Rightarrow \text{ ricostr con int polinomiale soddisf solo per POCHE funzioni molto regolari.}}$

Oss (condiz del pb della ricostruzione):

$[a,b]$; $t_0,\dots,t_k$; c f di camp; r f di ricostr

$\delta_0,\dots,\delta_k \in \mathbb{R}$; $f:[a,b]\to\mathbb{R}$



- $\hat{r}(t) = r\big(c(f)+\delta\big)$
- $\underbrace{\big|\hat{r}(t) - r(c(f))\big|}_{\text{errore assoluto, all'ist t, commesso ricostruendo dati "errati"}} = |r(\delta)|$

base di Lagrange di $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$

- $|r(\delta)| = |\delta_0\ell_0(t)+\dots+\delta_k\ell_k(t)|$

$\leq |\delta_0|\,|\ell_0(t)|+\dots+|\delta_k|\,|\ell_k(t)|$

$\leq \max\{|\delta_0|,\dots,|\delta_k|\}\,\big(\underbrace{|\ell_0(t)|+\dots+|\ell_k(t)|}\big)$

$\max\{\,|\ell_0(t)|+\dots+|\ell_k(t)|,\ t\in[a,b]\,\}$

$\geq C\log k$

Oss: $\exists\, t \in [a,b],\ \delta_0, \dots, \delta_k \in \mathbb{R}$ t.c. $|r(\delta)| = \max|\delta_j| \max\{|l_0| + \dots + |l_k|\}$

dim:

Sia $t^* \in [a,b]$ t.c.

$$|l_0(t^*)| + \dots + |l_k(t^*)| = \max\{|l_0(t)| + \dots + |l_k(t)|,\ t \in [a,b]\}$$

scelti $\delta_0, \dots, \delta_k \in \mathbb{R}$ t.c. $|\delta_0| = \dots = |\delta_k| = \Delta > 0$ e

$$\delta_0 l_0(t^*) \geq 0, \dots, \delta_k l_k(t^*) \geq 0$$

si ha:

$$\begin{aligned}
|r(\delta)(t^*)| &= |\delta_0 l_0(t^*) + \dots + \delta_k l_k(t^*)| = \\
&= \delta_0 l_0(t^*) + \dots + \delta_k l_k(t^*) = \\
&= \Delta\left(\text{segno}(\delta_0) l_0(t^*) + \dots + \text{segno}(\delta_k) l_k(t^*)\right) \\
&= \Delta\left(|l_0(t^*)| + \dots + |l_k(t^*)|\right) = \\
&= \Delta \max\{|l_0(t)| + \dots + |l_k(t)|,\ t \in [a,b]\}
\end{aligned}$$