Oss: basi diverse in $P_k(\mathbb{R}) \Rightarrow$ FORME diverse del p. che interpola.

Oss: $k=2$

- $P_2(\mathbb{R}) = \langle \ell_0, \ell_1, \ell_2 \rangle$: base e forma di LAGRANGE (matr identica)
- $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle$: base e forma di VANDERMONDE (matr di V.)
- $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1) \rangle$: base e forma di NEWTON (matr tr inf)

Es: dati $(0,1), (-1,2), (3,10), (1,10)$

- determ la f di Newt del p che interpola ("interpolante")
- (per casa) stessa cosa per dati permutati: $(3,10), (-1,2), (1,10), (0,1)$
- calcolare il valore del p in $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Soluz:

- base di Newton: $1,\ x,\ x(x+1),\ x(x+1)(x-3)$

  forma di Newton: $b_0 + b_1 x + b_2 x(x+1) + b_3 x(x+1)(x-3)$

  Il sist da risolvere per det i coeff è

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{matrix}} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$b_0 = 1$$

$$b_0 - b_1 = 2 \Rightarrow b_1 = -1$$

$$b_0 + 3b_1 + 12 b_2 = 10 \Rightarrow b_2 = 1$$

$$b_0 + b_1 + 2b_2 + 8b_3 = 10 \Rightarrow b_3 = 1$$

p. interpolante (in f. di Newt):

$$p(x) = 1 - x + x(x+1) + x(x+1)(x-3)$$

- $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}$:

$$p(\tilde{x}) = b_0 + b_1(\tilde{x}-x_0) + b_2(\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1) + b_3(\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2)$$

$$= \left[1,\ \tilde{x}-x_0,\ (\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1),\ (\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1)(\tilde{x}-x_2)\right] \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \\ p(3) \\ p(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 6 & -6 \\ 1 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & 4 & 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oss:

costo: (A) per det gli elem della riga...

elem # 1: 0S + 0P
" " 2: 1S + 0P
" " 3: 1S + 1P
" " 4: 1S + 1P

3S + 2P

(B) per il calcolo riga x colonna: 3P + 3S

Tot: 6S + 5P

In generale, per $k+1$ dati: costo $= kS+(k-1)P +$

$$+ k(S+P)$$

$$= 2kS + (2k-1)P$$

Per il calcolo in M punti: costo $= 2Mk(S+P)$.

• Probl LINEARE di INTERPOLAZIONE

dati: $\mathcal{F}$ sp vett su $\mathbb{R}$ di dim $j < +\infty$;

$L_0, \dots, L_k : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ lineari;

$y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$

determ: le $f \in \mathcal{F}$ t.c. $\underbrace{L_0(f) = y_0, \dots, L_k(f) = y_k}_{k+1 \text{ condizioni}}$

Es: (1) Un Pb di interp polin è un Pb lin di interp:

$$\mathcal{F} = P_k(\mathbb{R})$$

$$L_0(p) = p(x_0), \dots, L_k(p) = p(x_k)$$

OM: $L_0, \dots, L_k : P_k(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sono lineari.

(2) $\mathcal{F} = P_3(\mathbb{R})$; $L_0(p) = p(0)$, $L_1(p) = p(1)$;
$y_0 = 2$, $y_1 = 6$

• É Pb lin di interp MA non di interp polin!

(3) $\mathcal{F} = P_2(\mathbb{R})$; $L_0(p) = p(0)$, $L_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx$,
$L_2(p) = p''(0)$; $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$

• É Pb lin di interp (verificare!) MA non di interp polin!

(4) $\mathcal{F} = \mathrm{span}\{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$; $L_0(f) = f(0)$,
$L_1(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$; $y_0 = 1$, $y_1 = 2$

• É Pb lin di interp MA non di interp polin!

Oss: in generale: • $\mathcal{F} = \mathrm{span}\{f_1(t), \dots, f_j(t)\}$

• $L_0(f) = y_0, \dots, L_k(f) = y_k$ equiv a $(f(t) = a_1 f_1(t) + \dots + a_j f_j(t))$

$$\begin{bmatrix} L_0(f_1) & \cdots & L_0(f_j) \\ \vdots & & \vdots \\ L_k(f_1) & \cdots & L_k(f_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \qquad (*)$$

• se $f_1, \dots, f_j$ base di $\mathcal{F}$, la corrisp soluz pb lin interp $\rightleftarrows$ soluz sist lin $(*)$ è biunivoca.

Es (per casa): determ $p \in P_2(\mathbb{R})$ che verificano le condiz: $p(1) = 2$, $\int_0^6 p(x)\,dx = 0$

Sol: $\{(3+9t) - (1+11t)x + 2t\,x^2,\ t \in \mathbb{R}\}$

• CAMPIONAMENTO e RICOSTRUZIONE

<u>def</u> (f. di camp, f. di ricostruz) :

<u>dati</u> k intero ≥ 0 ; $[a,b]$ int non deg , $\overbrace{t_0, \dots, t_k}^{\text{distinti}} \in [a,b]$

• $c : \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ t.c. $c(f) = (f(t_0), \dots, f(t_k))^T$

FUNZ di CAMPIONAMENTO (agli istanti $\underbrace{t_0, \dots, t_k}_{\text{ISTANTI di CAMPIONAMENTO}}$)

$\boxed{\text{Oss : } c \text{ è } \underline{\text{lineare}} \text{ e } \underline{\text{non invertibile}}}$

$\left[\exists \ f_1 \neq f_2 \ \text{ t.c. } \ c(f_1) = c(f_2) \right]$