Es: ① $\phi_1(a,b) = a_1 \overset{1}{\otimes} b_1 \overset{n+1}{\oplus} \cdots \overset{2n-1}{\oplus} a_n \overset{n}{\otimes} b_n \approx a^T b$

costo $\phi_1 = n P + (n-1) S = (2n-1)$ flops $\approx 2n$ flops

② $\phi_2(A,b) = \left(\phi_1(\hat{a}_1,b),\dots,\phi_1(\hat{a}_n,b)\right)^T \approx Ab$ $\left[\hat{a}_k:\ k\text{-esima riga di } A\right]$

costo $\phi_2 = n^2 P + n(n-1) S = (2n^2-n)$ flops $\approx 2n^2$ flops

Oss: Se A è tr si ha $(\xi \otimes 0 = 0,\ \xi \oplus 0 = \xi)$:

costo 1ª componenti = $1P + 0S$

" 2ª " = $2P + 1S$

etc ... costo $\phi_2^{tr} = \frac{n(n+1)}{2} P + \frac{(n-1)n}{2} S = n^2$ flops

③ $\phi_3(T,c) = \widehat{SI}(T,c) \approx SI(T,c)$

costo $\phi_3 = n D + \frac{n(n-1)}{2}(P+S) = n^2$ flops

Oss: risolvere un sist di eq con matrice tr costa tanto quanto verificare se x è soluzione ...

④ $\phi_4(A) = \widehat{EGPP}(A) \approx EGPP(A)$

costo $\phi_4 = \frac{n^2+n}{2} D + \frac{2n^3-3n^2+n}{6}(P+S)$

$= \frac{4n^3-3n^2+5n}{6}$ flops $\approx \frac{2}{3}n^3$

⑤ $\phi_5(A,b)$ = soluz sist con $\widehat{EGPP}$ $\approx$ soluz sist con EGPP

costo ϕ_5 = costo ϕ_4 + 2 costo ϕ_3 $\approx \frac{2}{3}n^3$

⑥ $\phi_6(A) = \widehat{qr}(A) \approx qr(A)$

costo $\phi_6 \approx \frac{4}{3}n^3$

$\Rightarrow$ costo soluz sist con $\widehat{qr} \approx \boxed{\frac{4}{3}n^3}$

Oss: la soluz con qr costa (circa) il doppio rispetto a quella con EG.

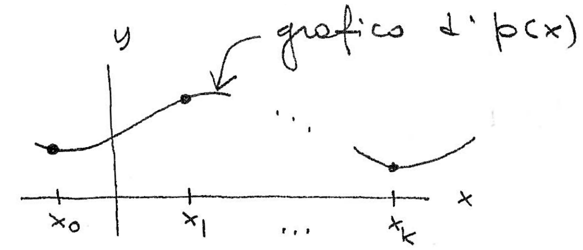
3 INTERPOLAZIONE

Pb (dell'interpolazione polinomiale):

dati
- k intero ≥ 0
- $P_k(\mathbb{R})$ = ins dei polin a coeff in $\mathbb{R}$, di grado $\leq k$ (sottosp vett delle f continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$)
- $x_0,\dots,x_k \in \mathbb{R}$, distinti
- $y_0,\dots,y_k \in \mathbb{R}$

determ $p \in P_k(\mathbb{R})$ t.c. $p(x_0)=y_0,\dots,p(x_k)=y_k$ ("che interpola i dati $(x_0,y_0),\dots,(x_k,y_k)$")

• int geometrica:



Assegnati $k+1$ punti — di coord $(x_0,y_0),\dots,(x_k,y_k)$ — determ $p \in P_k(\mathbb{R})$ il cui grafico contiene i punti.

Es: $k=2$, dati $(-1,0)$, $(0,1)$, $(2,-2)$

- $-x^2+6x+1$ non è soluz del Pb ...
- $P_2(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ; \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

RAPPRESENTAZ PARAMETRICA di $P_2(\mathbb{R})$

Riformulaz del Pb: cerco $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ t.c. il polin individuato verifichi le tre condiz

$$p(-1) = 0, \quad p(0) = 1, \quad p(2) = -2$$

OVVERO che risolvono il sist di eq lin:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Oss: a_0, a_1, a_2 soluzione del sistema

$\Updownarrow$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ soluzione del Pb di interp polin

Oss: $P_k(\mathbb{R}) = \langle q_0(x), \dots, q_k(x) \rangle$ (Ad es: $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle$)

cioè $P_k(\mathbb{R}) = \{ a_0 q_0(x) + \dots + a_k q_k(x) ; \ a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R} \}$

ALLORA $\alpha_0 q_0(x) + \dots + \alpha_k q_k(x)$ risolve il Pb di interp

$\Leftrightarrow$ $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)^T$ risolve il sist di eq. lineari

$$\begin{bmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \dots & q_k(x_0) \\ \vdots & & & \\ q_0(x_k) & q_1(x_k) & \dots & q_k(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

TEO (esist ed unicità dello soluz)

$\forall k$; $x_0, \dots, x_k$ distinti ; $y_0, \dots, y_k$

$\exists!\ p \in P_k(\mathbb{R})$ t.c. $p(x_0) = y_0, \dots, p(x_k) = y_k$

(dim : ... con base di Lagrange)

Es: determ l'elem di $P_2(\mathbb{R})$ che int i dati $(-1,0)$, $(0,1)$, $(2,-2)$ ...

A) ... usando base Lagrange

B) ... usando base Vandermonde

e verif che i polin trovati sono uguali.