- FATTORIZZAZIONE QR

def: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$; $U, T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ t.c. ...

Es (procedim di calcolo): $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

PASSO 1: determ $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a colonne ortogonali e $\Theta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tr sup con $\Theta_{kk} = 1$ t.c. $\Omega\Theta = A$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \omega_1 \theta_{12} + \omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \omega_1\theta_{13} + \omega_2 \theta_{23} + \omega_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\omega_1 = \ldots$

$\theta_{12} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \bullet \omega_1}{\|\omega_1\|^2}$, $\omega_2 = \ldots$

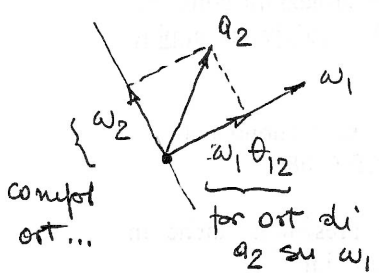
$\theta_{13} = \dfrac{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \omega_1}{\|\omega_1\|^2}$, $\theta_{23} = \dfrac{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \omega_2}{\|\omega_2\|^2}$, $\omega_3 = \ldots$

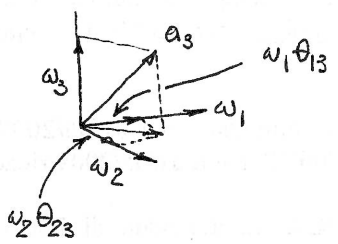
PASSO 2: $W = \mathrm{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|, \|\omega_3\|)$

- ΩW^{-1} è ortogonale
- $W\Theta$ è tr sup
- $(\Omega W^{-1})(W\Theta) = A$

quindi: $\boxed{U = \Omega W^{-1},\ T = W\Theta \text{ è fatt QR di } A}$

Oss (analogia con proc ortonorm Gram-Schmidt):





TEO (esistenza fatt QR): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, invertibile.

$\exists$ fatt QR di A, ed il proc descritto sopra ne trova una.

(dim: no)

Oss (uso QR per soluz sist): $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

(1) $(U, T) = qr(A)$
(2) $c = U^T b$
(3) $x = SI(T, c)$

procedura SODDISFACENTE:
SE A invert, TROVA x
SE A non invert, SI ARRESTA

- Uso del calcolatore

$$A, b \longrightarrow \boxed{qr \ \ *} \xrightarrow{T,\, c} \boxed{SI} \longrightarrow x^*$$

in $\mathbb{R}$

---

in $F(\beta, m)$

$$\hat{A}, \hat{b} \longrightarrow \boxed{\widehat{qr} \ \ \hat{*}} \xrightarrow{\hat{T},\, \hat{c}} \boxed{\widehat{SI}} \longrightarrow \hat{x}$$

con: $\hat{A} = rd(A)$, $\hat{b} = rd(b)$;

$\widehat{qr}$, $\hat{*}$, $\widehat{SI}$ realizzazioni delle corrisp proc.

Oss: $(\mathbb{R}^n, N_2)$
- $T = U^T A \Rightarrow \|T\|_2 \le \|A\|_2$
- $T^{-1} = A^{-1} U \Rightarrow \|T^{-1}\|_2 \le \|A^{-1}\|_2$

$$\Rightarrow \boxed{c_2(T) \le c_2(A)}$$

Es (per casa): U ortogonale $\Rightarrow \|U\|_2 = 1$

Il procedim qr + * + SI ha realizzazioni STABILI ALL'INDIETRO: il vett $\hat{x}$ calcolato è LA soluzione di un sistema perturbato

$$(A + \delta A)\, x = b$$

con ϵ_A piccolo.

Oss (int fisica):

se il sist $Ax = b$ ha origine fisica, i dati A e b sono affetti da errore;

se $\delta A \approx$ errore di origine fisica, allora $\hat{x}$ è "fisicam significativo".

COSTO

def (costo aritmetico): # pseudo op eseguite per portare a termine...

Oss: (I) costo confronti = 0 ... ragionevole se "relativam pochi".
(II) costo pseudo-op indip da operandi (falso se op non lin!)