Es: $A = \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$, $\hat{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Pb: detta x^* LA soluz del sistema $Ax = b$, studiare l'err commesso appross x^* con $\hat{x}$.

- $c_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 21 \cdot \frac{21}{400} = \frac{441}{400} \simeq 1$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{400} \\ 0 & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

(I) Interpretazione di $\hat{x}$: LA soluzione del sistema

$$\boxed{Ax = b + r}$$

con: $r = A\hat{x} - b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (RESIDUO associato ad $\hat{x}$)

- $\epsilon_b = \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1} = \frac{\|r\|_1}{\|b\|_1} = \frac{1/2}{20} = \frac{1}{40}$

- Teo. condiz, I $\Rightarrow$ $\boxed{\epsilon_d \leq c_1(A)\,\epsilon_b = \frac{441}{400}\,\frac{1}{40} \simeq \frac{1}{40}}$

(II) Interpretazione di $\hat{x}$: LA soluzione del sistema

$$\boxed{(A + \delta A)x = b}$$

con $\delta A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- $\epsilon_A = \frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1} = \frac{1}{21}$

- Teo condiz, II $\Rightarrow$ $\boxed{\hat{\epsilon}_d \leq c_1(A)\,\epsilon_A = \frac{441}{400}\,\frac{1}{21} = \frac{21}{400} \simeq \frac{1}{20}}$

Per confrontare l'info ottenuta con le due interpretazioni di $\hat{x}$, devo rendere omogenee le misure di errore.

OSS: (a) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$: $\big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v - w\|$

(dim: segue dalla disug triangolare $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ ponendo $a = v - w$ e $b = w$ e poi $a = v - w$ e $b = -v$.)

(b) $\epsilon_d = \frac{\|\delta x\|}{\|x^*\|} = \frac{\|\delta x\|}{\|\hat{x}\|} \cdot \frac{\|\hat{x}\|}{\|x^*\|} = \hat{\epsilon}_d \frac{\|\hat{x}\|}{\|x^*\|}$ $\quad (\delta x = \hat{x} - x^*)$

MA: $\frac{\|\hat{x}\|}{\|x^*\|} = \frac{\|\hat{x}\| - \|x^*\|}{\|x^*\|} + 1$.

Per (a): $-\|\hat{x} - x^*\| \leq \|\hat{x}\| - \|x^*\| \leq \|\hat{x} - x^*\|$

$\Rightarrow -\epsilon_d \leq \frac{\|\hat{x}\| - \|x^*\|}{\|x^*\|} \leq \epsilon_d \Rightarrow 1 - \epsilon_d \leq \frac{\|\hat{x}\|}{\|x^*\|} \leq 1 + \epsilon_d$

ALLORA: $\epsilon_d = \hat{\epsilon}_d \frac{\|\hat{x}\|}{\|x^*\|} \geq \hat{\epsilon}_d (1 - \epsilon_d)$

$$\boxed{\text{SE } \epsilon_d < 1: \quad \hat{\epsilon}_d \leq \frac{\epsilon_d}{1 - \epsilon_d}}$$

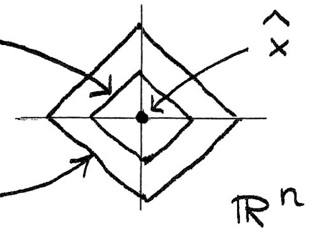
---

si ottiene, da (I): $\epsilon_d \le \frac{1}{40} \Rightarrow \boxed{\hat{\epsilon}_d \le \frac{1/40}{1-1/40} = \frac{1}{39}}$

ovvero: dall'interpr (I) otteniamo PIÚ INFO che dall'interpr (II):

$$(I) \Rightarrow x^* \in J_1\left(\hat{x}, \frac{1}{39}\right)$$

$$(II) \Rightarrow x^* \in J_1\left(\hat{x}, \frac{1}{20}\right)$$



Es (per casa): determ max di $\frac{|\delta x_1|}{|\hat{x}_1|}$ e $\frac{|\delta x_2|}{|\hat{x}_2|}$.

- Uso del calcolatore

$$A, b \longrightarrow \boxed{EGP \quad SA} \xrightarrow{D,\, c} \boxed{SI} \longrightarrow x^*$$

in $\mathbb{R}$

in $F(\beta, m)$

$$\hat{A}, \hat{b} \longrightarrow \boxed{\widehat{EGP} \quad \widehat{SA}} \xrightarrow{\hat{D},\, \hat{c}} \boxed{\widehat{SI}} \longrightarrow \hat{x}$$

con: $\hat{A} = rd(A)$, $\hat{b} = rd(b)$;
$\widehat{EGP}$, $\widehat{SA}$, $\widehat{SI}$ realizzazioni delle corrisp proc.

Oss: interpretazione di $\widehat{SI}$.

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

in $\mathbb{R}$...

① $x_2 = \frac{c_2}{d_{22}}$

② $x_1 = \frac{c_1 - d_{12} x_2}{d_{11}}$

in $F(2,53)$...

⓪ ip: $d_{11}, d_{12}, d_{22}, c_1, c_2 \in F(2,53)$

① $\xi_2 = c_2 \overset{1}{\oslash} d_{22} = \frac{c_2}{d_{22}}(1+\epsilon_1)$

$\exists\, \epsilon_1$ t.c. ...

Posto: $d_{22}' = \frac{d_{22}}{1+\epsilon_1}$ si ha
- $d_{22}' \simeq d_{22}$
- $\boxed{\xi_2 = \frac{c_2}{d_{22}'}}$

② $\xi_1 = \left(c_1 \overset{3}{\ominus} \left(d_{12} \overset{2}{\otimes} \xi_2\right)\right) \overset{4}{\oslash} d_{11} = \left(\exists\, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4 \text{ t.c. } \ldots\right)$

$$= \frac{\left(c_1 - d_{12}\xi_2(1+\epsilon_2)\right)(1+\epsilon_3)}{d_{11}}(1+\epsilon_4)$$

Posto:

$d_{11}' = \frac{d_{11}}{(1+\epsilon_4)(1+\epsilon_3)}$

$d_{12}' = d_{12}(1+\epsilon_2)$

si ha
- $d_{11}' \simeq d_{11}$ e $d_{12}' \simeq d_{12}$
- $\boxed{\xi_1 = \frac{c_1 - d_{12}'\xi_2}{d_{11}'}}$

$\Rightarrow$ il vettore $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \widehat{SI}(D,c)$ e'

la soluzione del sistema $\underbrace{\begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} \\ 0 & d'_{22} \end{bmatrix}}_{\tilde{D}} x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$,

ovvero:

$$\boxed{\widehat{SI}(D,c) = SI(\tilde{D},c), \ \tilde{D} \text{ tr sup} \simeq D}$$

l'algoritmo $\widehat{SI}$ e' STABILE quando utilizz per appross la funzione SI.

Piu' precisam: l'algo e' <u>STABILE ALL'INDIETRO</u> ovvero fornisce "<u>il valore</u> di f in un punto vicino ad x" e non solo "<u>una appross accurata del valore</u> di f in un punto vicino ad x".

$$\left[\begin{array}{l} \varphi(x) = f((1+\epsilon)x) \\ \quad \text{e non } \varphi(x) = (1+\epsilon_1) f((1+\epsilon_2)x) \end{array} \right]$$

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 2^{-k} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ con $b_1, b_2 \in F(2,53)$

- $EGP(A) = \Big(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2^k & 1 \end{matrix}}}_{S}, \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 2^{-k} & 1 \\ 0 & -2^k \end{matrix}}}_{D}, \underbrace{I}_{P} \Big)$

- $\widehat{EGP}(A) = (S, D, P)$: in questo caso il calc determina i fattori esatti. (VERIFICARE!)
  $\uparrow$ $2^{-k}, 0, 1 \in F(2,53)$

- $c = SA(S,b)$: $\begin{cases} c_1 = b_1 \\ -2^k c_1 + c_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = b_1 \\ c_2 = b_2 + 2^k b_1 \end{cases}$

- $\hat{c} = \widehat{SA}(S,b)$
  $\uparrow$ $b_1, b_2 \in F(2,53)$...

  <u>ip</u> b_1, b_2 t.c. $b_2 + 2^k b_1 \in F(2,53)$

  $\Downarrow$

  $\boxed{\hat{c} = c}$ (VERIFICARE!)

infime:

$$x^* = SI(D,c)$$
$$\hat{x} = \widehat{SI}(D,c) = SI(\tilde{D},c)$$
$$\tilde{D} \text{ tr sup} \simeq D$$

Per capire se $\hat{x}$ e' una buona approm di x^* utilizzo il Teo condiz, II (ho un sist con perturbaz solo sul dato matrice!):

$$\hat{\epsilon}_d \le c(D)\, \epsilon_D \quad \leftarrow \frac{\|D - D\|}{\|D\|}$$

<u>SE</u> $c(D)$ moderatam grande: ok

<u>SE</u> $c(D)$ molto grande: SITUAZIONE A RISCHIO!

Calcolo $c_1(D) = \|D\|_1 \cdot \|D^{-1}\|_1 = (1+2^k) \cdot 2^k$

D^{-1}: $\boxed{\begin{matrix} 2^k & 1 \\ 0 & -2^{-k} \end{matrix}}$

e $\lim_{k \to \infty} c_1(D) = +\infty$

Il sist $Dx = c$ ha <u>PESSIME</u> proprietà di condiz (per k grande...) Ⓔ

$$c_1(A) = \|A\|_1 \, \|A^{-1}\|_1 = (1+2^{-k})^2 < 4$$

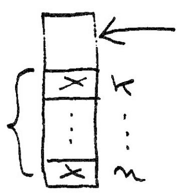
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2^{-k} \end{bmatrix}$$

il sist $Ax = b$ ha <u>BUONE</u> proprietà di condiz. per OGNI k.

La proc EGP ha prodotto un fattore destro con $c(D) \gg c(A)$: EGP è soddisfacente SE operiamo in $\mathbb{R}$, NON lo è se operiamo in $F(\beta, m)$.

<u>Soluzione</u>: EGPP (EG con Pivoting Parziale)

"al k-esimo passo si sceglie come pivot l'elem di massimo valore assoluto

tra:  ← k-esima colonna di $A^{(k)}$ ".

<u>Oss</u>: EGPP può effettuare permutaz di righe anche quando EGP non lo farebbe.

<u>Es</u>: $\text{EGPP}(A) = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2^{-k} & 1 \end{matrix}}, I, P_{12} \right)$

e $c(D) = 1$ (caso ottimo!)

In generale, con EGPP:

$\forall n \; \exists \, C_n$ t.c. $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invert, per il fatt destro si ha:

$$c(D) \le C_n \, c(A)$$

Il procedim EGPP + SA + SI ha realizz STABILI ALL'INDIETRO: il vett $\hat{x}$ calcolato è la soluz di un sistema perturbato $(A + \delta A)x = b$ con ϵ_A PICCOLO.