<u>Oss</u>: $\sup\{\#\} < +\infty$

$\boxed{\text{Es: } N_\infty(Av) \leq [N_\infty(a_1)+\dots]\, N_\infty(v)}$

<u>Oss</u>: (formule di calcolo):

$$N_1(A) = \max\{N_1(a_1), \dots, N_1(a_n)\} = \|A\|_1$$

$$N_\infty(A) = \max\{N_1(r_1^T), \dots, N_1(r_n^T)\} = \|A\|_\infty \quad (= \|A^T\|_1)$$

$$N_2(A) = \sqrt{\max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{ autovalore di } A^TA\}}$$

<u>Oss</u>: A^TA è simm semidef pos $\Rightarrow$ autov ≥ 0

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $\|A\|_1 = \max\{3, 2\} = 3$
- $\|A\|_\infty = \max\{4, 1\} = 4$
- $A^TA = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ SDP; $\|A\|_2 = \sqrt{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}}$.

- <u>PROPRIETÀ delle NORME INDOTTE</u>: $\mathbb{R}^n, N$

(I) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, v \in \mathbb{R}^n$: $N(Av) \leq \|A\|_N\, N(v)$

<u>Es</u> (per casa): dimostrare usando la def di norma indotta.

(II) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|A\|_N = \max\{N(Av),\ N(v)=1\}$

$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert: $\|A^{-1}\|_N = \left(\min\{N(Av),\ N(v)=1\}\right)^{-1}$

$$\left\{\frac{N(Av)}{N(v)},\ v\neq 0\right\} = \left\{N\left(A\frac{v}{N(v)}\right),\ v\neq 0\right\} = \{N(Av),\ \underline{N(v)=1}\}$$

$N(Av)$: f. continua $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $N(v)=1$: CHIUSO e limitato in $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \exists$ max & min $\longrightarrow$ <u>SE</u> A invert:

max $\equiv \|A\|_N$; min $= (\|A^{-1}\|_N)^{-1}$

(III) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|AB\|_N \leq \|A\|_N\, \|B\|_N$ (<u>dim</u>: no)

<u>Oss</u>: f_∞ non indotta: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Oss</u>: $\mathbb{R}^{n\times n}$ sp vett su $\mathbb{R}$ di dim n^2;

N norma in $\mathbb{R}^n \Rightarrow f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(M) = \|M\|_N$ è norma in $\mathbb{R}^{n\times n}$

(<u>dim</u>: f verifica le propr N1, N2 ed N3)

<u>Es</u> (norme in $\mathbb{R}^{n\times n}$): $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di comp m_{ij} ($\sim$ vettore di $\mathbb{R}^{n^2}$...)

(1) $f_1: M \to \sum_{i,j} |m_{ij}|$

(2) $f_2: M \to \sqrt{\sum_{i,j} |m_{ij}|^2}$ (FROBENIUS)

(∞) $f_\infty: M \to \max\{|m_{11}|, \dots, |m_{nn}|\}$

<u>Oss</u>: f_1, f_2 non sono indotte [$\nexists$ norma in $\mathbb{R}^n$ t.c. ...]:
$f_1(I) = n$; $f_2(I) = \sqrt{n}$
se fossero indotte sarebbe $= 1$.

- <u>CONDIZIONAMENTO</u>

<u>dati</u>: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert, $b \in \mathbb{R}^n$

<u>soluz</u>: x^* t.c. $Ax^* = b$

<u>dati perturbati</u>: $A + \delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert, $b + \delta b \in \mathbb{R}^n$

δA, δb: PERTURBAZIONE dei dati

<u>soluz</u>: $\hat{x}$ t.c. $(A+\delta A)\hat{x} = b + \delta b$

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $A + \delta A = \begin{bmatrix} 9 & 6{,}1 \\ -1 & 3{,}8 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta A = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}1 \\ 0 & -0{,}2 \end{bmatrix}$

Introduciamo le MISURE RELATIVE delle perturbazioni e della variazione della soluzione:

$$\varepsilon_A = \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \qquad \varepsilon_d = \frac{\|\overbrace{\delta x}^{= \hat{x} - x^*}\|}{\|x^*\|}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

- CASO 1 : $\delta A = 0$, $b \neq 0$

TEO (condiz, I) : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, invert ;

- $\forall b \begin{cases} \in \mathbb{R}^n \\ \neq 0 \end{cases}$, $\forall \delta b \in \mathbb{R}^n$: $\varepsilon_d \leq c(A)\, \varepsilon_b$
- $\exists b \begin{cases} \in \mathbb{R}^n \\ \neq 0 \end{cases}$, $\exists \delta b \in \mathbb{R}^n$: $\varepsilon_d = c(A)\, \varepsilon_b$

def (numero di condiz) : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, invertibile ;

$c(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$ NUMERO di CONDIZIONAM di A