Es: Sia $EGP(A) = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{D} \right)$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) determ A, det A

(2) ris $Ax = b$

(3) determ A^{-1}

(4) Verif che $EGP(A) = \dots$

---

(1) da EGP: $PA = SD \Rightarrow A = P^T S D$

$$SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^T S D = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A}$$

$$A = P^T S D \Rightarrow \det A = \underbrace{\det P^T}_{=\,-1} \; \underbrace{\det S}_{=\,1} \; \underbrace{\det D}_{=\,-2} = 2$$

(2) usando il procedimento visto:

(I) $c = SA(S, Pb) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(II) $x_* = SI(D, c) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (verifica... ok!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(3) $A = P^T S D \Rightarrow A^{-1} = D^{-1} S^{-1} P$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = y \Rightarrow x = \begin{bmatrix} y_1 + y_3 \\ \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \\ -y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=\,D^{-1}} y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = y \Rightarrow x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 - y_1 - y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{=\,S^{-1}} y$$

<u>Oss</u>: in generale si ha...

- M tr sup invert $\Rightarrow M^{-1}$ tr sup
- M tr inf con 1 sulla diag $\Rightarrow M^{-1}$ tr inf con 1 sulla diag

Allora:

$$D^{-1} S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} S^{-1} P = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}}$$

(4) Per casa...

da fare: • CONDIZIONAMENTO

Preliminare: norme in $\mathbb{R}^n$ e norme di matrici

già noto: $\mathbb{R}^n$ sp vett su $\mathbb{R}$ con p.s. canonico

$N: v \to \sqrt{v \cdot v} = \| v \| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$

- NORMA EUCLIDEA di v, $\|v\|_2$, $N_2(v)$

def (norma, sp normato)

V sp vett su $\mathbb{R}$, $N: V \to \mathbb{R}$ norma in V se:

(N1) $\forall v \in V: N(v) \geq 0$ e $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$

(N2) $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R}: N(\alpha v) = |\alpha| \, N(v)$

(N3) $\forall v, w \in V: N(v+w) \leq N(v) + N(w)$ [disug triangolare...]

(V, N) si dice SPAZIO NORMATO

Es (altre norme in $\mathbb{R}^n$): $N_1: v \to |v_1| + \dots + |v_n| = \|v\|_1$

$N_\infty: v \to \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} = \|v\|_\infty$

Es (1) verif che N_1 è norma (Sol: ...)
(2) per casa: verif che N_∞ è norma

---

def (intorno sferico): $J_N(v, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid N(x - v) \leq r \}$

v: CENTRO, r: RAGGIO

Es: disegnare $J_N(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ per N_1, N_2, N_∞ ...

def (norma di matrice): Si cons $\mathbb{R}^n$ con norma N; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|A\|_N = \sup \left\{ \frac{N(Av)}{N(v)}, v \neq 0 \right\}$$

norma di A INDOTTA da N

Es: $\mathbb{R}^n, N$; $\|I\|_N = 1$