Procedura EGP (per la ricerca di fatt LR)

- A partire dalla matrice assegnata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ costruisce una sequenza finita di matrici, in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Se la procedura termina correttamente, la sequenza ha <u>lunghezza</u> <u>n</u> e l'ultima matrice è <u>triangolare superiore</u>.

- Costruzione della sequenza:

$$A^{(1)} = A;$$
$$A^{(2)} = H_1 P_1 A^{(1)}$$
$$\vdots$$
$$A^{(n)} = H_{n-1} P_{n-1} A^{(n-1)}$$

con: P_k di permutaz, H_k tr inf con 1 sulla diagonale... $\Rightarrow$ invertibili!

- Risultato (se termina correttamente):

$$D \equiv A^{(n)} = H_{n-1} P_{n-1} \cdots H_1 P_1 \, A$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{P_1^T H_1^{-1} \cdots P_{n-1}^T H_{n-1}^{-1}} \, D$$

<u>Oss</u>: NON è tr inf con 1 sulla diagonale...

<u>MA</u>: posto $P \equiv P_{n-1} \cdots P_1$ si ha:

$$P \left[P_1^T H_1^{-1} \cdots P_{n-1}^T H_{n-1}^{-1} \right] \equiv S$$

È tr inf con 1 sulla diagonale

EGP produce, SE termina correttamente, matrici S, D, P t.c. S, D è una fatt LR di PA

in particolare: $PA = SD$.

---

dettagli...

1. come determinare P_k e H_k in modo che $A^{(n)}$ sia tr sup;
2. come mai $P[\ldots]$ è tr inf con 1 sulla diagonale.

<u>Esempio.</u>

- $A^{(1)} = A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

- $a_{11}^{(1)} \neq 0 \Rightarrow P_1 = I$;

  H_1 tr inf con 1 sulla diag e colonna k-esima $= e_k$ (colonna k-esima di I) per $k \neq 1$

t.c. $H_1 P_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} \; & \; \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix}$

Posto $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ e $P_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_4 \end{bmatrix}$

si ha:

$$H_1 P_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 + \lambda_{21} r_1 \\ r_3 + \lambda_{31} r_1 \\ r_4 + \lambda_{41} r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; & \; \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

PIVOT #1 $\rightarrow \underset{\displaystyle a_{11}^{(1)}}{\overset{\|}{r_{11}}} \neq 0 \Rightarrow \lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{41}$ univocam determ!

$$(2\ 2\ 1\ 0) + \lambda_{21}(1\ 1\ 0\ 0) = (0, \dots)$$
$$\Leftrightarrow 2 + \lambda_{21} \cdot 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_{21} = -\frac{2}{1} = -\frac{r_{21}}{r_{11}}$$

Analogam: $\boxed{\lambda_{k1} = -\dfrac{r_{k1}}{r_{11}}}$

Si ottiene: $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e: $A^{(2)} = H_1 P_1 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

- $a_{22}^{(2)} = 0 \Rightarrow$ scambio la seconda riga con la terza: così ottengo elem $\neq 0$ in $(2,2)$.

$P_2 = P_{23}$ (matr di perm che scambia riga 2 con riga 3);

H_2 tr inf con 1 sulla diag Ⓔ colonne k-esime $= e_k$ per $k \neq 2$

t.c. $H_2 P_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} \; & \; & \; \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$

Posto $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ e $P_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_4 \end{bmatrix}$

si ha:

$$H_2 P_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + \lambda_{32} r_2 \\ r_4 + \lambda_{42} r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ & 0 & \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

PIVOT #2 $\rightarrow \underset{\displaystyle r_{22}}{\overset{(P_2 A^{(2)})_{22}}{\|}} \neq 0 \Rightarrow \lambda_{32}, \lambda_{42}$ univocam determ!

... $\boxed{\lambda_{k2} = -\dfrac{r_{k2}}{r_{22}}}$

Si ottiene: $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e: $A^{(3)} = H_2 P_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

• $a_{33}^{(3)} \neq 0 \Rightarrow P_3 = I$;

H_3 tr inf con 1 sulla diag (E) riga k-esima = e_k per $k \neq 3$

t.c. $H_3 P_3 A^{(3)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & \boxed{0} & \\ \hline \end{array}$

Posto $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{43} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ e $P_3 A^{(3)} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_4 \end{bmatrix}$

si ha: $r_{33} \neq 0 \Rightarrow \lambda_{43}$ univoco con determ!

$\boxed{\text{PIVOT \#3}}$ $r_{33} = (P_3 A^{(3)})_{33}$

... $\boxed{\lambda_{k3} = -\dfrac{r_{k3}}{r_{33}}}$

Si ottiene: $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

PIVOT

e: $A^{(4)} = H_3 P_3 A^{(3)} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv D$

In generale:

(1) SE $a_{kk}^{(k)} = 0$ ALLORA cerca permutazione
ALTRIMENTI $P_k = I$;

cerca permutazione =
SE $\exists\, j > k$ t.c. $a_{jk}^{(k)} \neq 0$ ALLORA $P_k = P_{kj}$
ALTRIMENTI STOP (la proc termina PREMATURAMENTE)

Adesso: $D = H_3 H_2 P_2 H_1 A \Rightarrow A = \left(H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} H_3^{-1}\right) D$

• $H_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Per ricavarlo: risolvo con SA il sistema simbolico $H_1 x = y$. Si scopre che:

* H_1^{-1} è tr inf con 1 sulla diag ;
* H_1^{-1} si ottiene da H_1 cambiando segno agli elem sotto la diagonale.

In generale:

* H_k^{-1} è tr inf con 1 sulla diag;
* H_k^{-1} si ottiene da H_k cambiando segno agli elem sotto la diagonale.

Adesso calcolo $H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} H_3^{-1}$:

- $H_2^{-1} H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&2&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&\boxed{2}&1 \end{bmatrix}$

In generale:

> SE $k < j$: $H_k^{-1} H_j^{-1}$ è la matr tr inf con 1 sulla diag i cui elem sotto la diag si ottengono sommando gli elem corrispondenti di H_k e H_j.

- $P_2^T = P_{23} \Rightarrow P_2^T H_2^{-1} H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&1&2&1 \end{bmatrix}$

- infine: $H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 2&0&1&0\\ -2&1&0&0\\ -1&1&2&1 \end{bmatrix}$ NON è tr inf !!

Ora moltiplico per $P \equiv P_2 = P_{23}$:

$P_{23}[\dots] = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ -2&1&0&0\\ 2&0&1&0\\ -1&1&2&1 \end{bmatrix}$ è tr inf con 1 sulla diag !!

In questo caso:

$$\underbrace{P_2 \left[H_1^{-1} P_2^T \right.}\left. H_2^{-1} H_3^{-1} \right]$$

tr inf con 1 sulla diag !!

$$P_2 \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 2&1&0&0\\ -2&0&1&0\\ -1&0&0&1 \end{bmatrix} P_2^T = P_2 \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 2&0&1&0\\ -2&1&0&0\\ -1&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ -2&1&0&0\\ 2&0&1&0\\ -1&0&0&1 \end{bmatrix} \equiv \overset{②}{H}{}_1^{-1}$$

> $P_2 H_1^{-1} P_2^T$ si ottiene da H_1^{-1} applicando P_2 SOLO AL DI SOTTO DELLA DIAGONALE.

e quindi: $P_2[\dots] = \overset{②}{H}{}_1^{-1} H_2^{-1} H_3^{-1} \equiv S$

* è tr inf con 1 sulla diag perché lo sono le H^{-1};
* gli elem sotto la diag si ottengono sommando gli elem corrisp delle H^{-1}!

Oss: se $A = \left[P_1^T H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T H_3^{-1} \right] D$

e $P \equiv P_3 P_2 P_1$, allora:

$$P_3 P_2 \cancel{P_1 [P_1^T} H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T H_3^{-1}] =$$

$$= P_3 \underset{\substack{\| \\ \overset{②}{H}{}_1^{-1} \\ \text{tr inf...}}}{\left(P_2 H_1^{-1} P_2^T \right)} H_2^{-1} P_3^T H_3^{-1} =$$

$$= \underbrace{P_3 \overset{②}{H_1^{-1}} P_3^T}_{\substack{③\\ H_1^{-1}\\ \text{tr inf...}}} \underbrace{P_3 H_2^{-1} P_3^T}_{\substack{③\\ H_2^{-1}\\ \text{tr inf...}}} H_3^{-1}$$

$\not\equiv$ tr inf con 1 sulle diag!

<u>Es</u>: Sia $A^{(2)} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$. In tal caso $\nexists\, j > 2$ t.c. $a^{(2)}_{j2} \neq 0$: <u>EGP termina prematuramente</u>!

<u>NB</u>: le prime due colonne di $A^{(2)}$ sono lin dip $\Rightarrow$ $A^{(2)}$ non invert $\Rightarrow$ <u>A non invert</u>

$\left[A^{(2)} = H_1 P_1 A \right]$

> <u>Teo</u> (ris di def di EGP):
>
> Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di colonne $a_1, \dots, a_n$.
>
> EGP è def su A
>
> $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_{n-1}$ lin indip

<u>dim</u> ($\Rightarrow$): $PA = SD \Rightarrow A = P^T S D$

con P^T, S invert e colonne $d_1, \dots, d_{n-1}$ lin indip (perché $d_{11} \neq 0, \dots, d_{n-1,n-1} \neq 0$ sono i pivot!) $\Rightarrow$ colonne $a_1, \dots, a_{n-1}$ lin indip

Procedura per la ricerca della soluz di $Ax = b$ con EGP:

$\boxed{1}$ $[P, S, D] = \mathrm{EGP}(A)$;

$\boxed{2}$ <u>SE</u> $\boxed{1}$ ok : $c = \mathrm{SA}(S, Pb)$

$\boxed{3}$ <u>SE</u> $d_{nn} \neq 0$: $x^* = \mathrm{SI}(D, c)$

> <u>Oss</u>: <u>SE</u> A non invert <u>ALLORA</u>:
>
> $\boxed{1}$ non ok oppure $d_{nn} = 0$
>
> <u>ALTRIMENTI</u> la procedura determina l'unica soluzione x^*.