2 SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI

Pb: dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile, $b \in \mathbb{R}^n$
determinare $x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax^* = b$

Oss: A invertibile significa (propr equivalenti)

- $\exists!\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $AB = BA = I$ (matr identità, $B = A^{-1}$)
- $\det A \neq 0$
- $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\ker A = \{0\}$
- colonne (righe) di A sono elem lin indip (q. di BASE) di $\mathbb{R}^n$
- $\forall b \in \mathbb{R}^n,\ \exists!\ x^*: Ax^* = b$

- Casi SEMPLICI

(D) A diagonale ($a_{ij} = 0$ per $i \neq j$)

- invertibile ~ $a_{kk} \neq 0$, $k = 1,\dots,n$
- soluzione: $x_k = b_k / a_{kk}$, $k = 1,\dots,n$

(T) A triangolare ($a_{ij} = 0$ per $\begin{cases} i > j & \text{tr SUPERIORE} \\ i < j & \text{tr INFERIORE} \end{cases}$)

- invertibile ~ $a_{kk} \neq 0$, $k = 1,\dots,n$
- soluzione: TS) SOSTITUZIONE all'INDIETRO
  TI) SOSTITUZIONE in AVANTI (Es: descrivere procedura!)

$x = SI(T, c)$
dati: $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tr sup invert, $c \in \mathbb{R}^n$
uscita: $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Tx = c$
$x_n = c_n / t_{nn}$
per $k = n-1,\dots,1$ ripeti
- $s_k = c_k - (t_{k,k+1} x_{k+1} + \dots + t_{kn} x_n)$;
- $x_k = s_k / t_{kk}$

PROCEDURA (FUNZIONE) SOSTITUZIONE all'IND (op in $\mathbb{R}$)

(O) A ortogonale (ovvero – proprietà equivalenti:

- colonne (righe) sono BASE ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$, risp al p.s. canonico
- $A^T A = I$
- $A^{-1} = A^T$)

- invertibile sicuramente
- soluzione: $Ax = b \sim A^T A x = A^T b$
  $\sim \boxed{x = A^T b}$

(P) A di permutazione (le colonne [righe] di A sono una permutaz di quelle $e_1,\dots,e_n$ della matr identità; Es: I, J)

Oss: A di permutazione ...
- $\Rightarrow$ A ortogonale
- $v \in \mathbb{R}^n$, le comp di Av ...

- invertibile sicuramente
- soluzione: $x^* = A^T b$ (ottenuta permutando le comp. di b!)

Es: $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; determ P di perm t.c. $Pv = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

- Caso GENERALE

idea: (I) fattorizzare A con (scrivere A come prodotto di) fattori SEMPLICI...

$$A = F_1 F_2 F_3$$

Oss: A invertibile
$\Updownarrow$
ciascun fattore invert.

... poi:

(II) la soluz x^* di $Ax=b$ vale

$$x^* = F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} b$$

e q.di si può determ calcolando:

(1) $c_1 = F_1^{-1} b =$ la soluz di $F_1 x = b$;

(2) $c_2 = F_2^{-1} c_1 =$ la soluz di $F_2 x = c_1$;

(3) $c_3 = F_3^{-1} c_2 =$ la soluz di $F_3 x = c_2$.

Infatti si ha:

$$c_3 = F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} b = x^*.$$

Dunque: per det la soluz di $Ax=b$

(I) fattorizz $A = F_1 F_2 F_3$;

(II) risolvere tre sistemi SEMPLICI.

Considereremo due tipi di fattorizz e loro varianti:

Es: (1) fattorizzazione LR

$S, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.
- S tr. inf con $s_{kk}=1$ (invert!)
- D tr sup
- $SD = A$

$\boxed{\text{Oss: } A \text{ invert} \Leftrightarrow D \text{ invert}}$

(2) fattorizz QR

$U, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.
- U ortogonale (invertibile!)
- T tr sup
- $UT = A$

$\boxed{\text{Oss: } A \text{ invert} \Leftrightarrow T \text{ invert}}$

Pb: assegnata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ determ fatt LR ...

Soluz: tentare usando $\boxed{\text{elim di Gauss}}$

... QR

Soluz: tentare usando $\boxed{\text{procedura di GRAM-SCHMIDT}}$

Oss: Siano $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

Allora: $HA = \begin{bmatrix} r_1 \\ \lambda_1 r_1 + r_2 \\ \lambda_2 r_1 + r_3 \end{bmatrix}$.