• METODO di NEWTON

f derivabile e $f' \neq 0$; è il m. it ad un punto def da

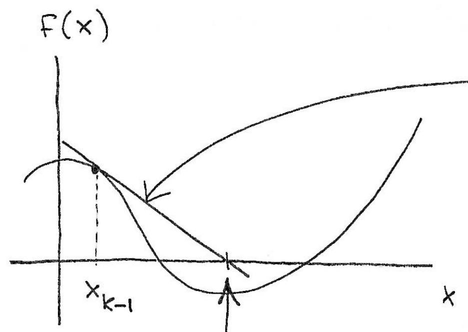
$$\boxed{h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Proprietà: • $f(x) = 0$ equivalente a $h(x) = x$

• SE $f \in C^2$ e α zero di f ALLORA

$h'(\alpha) = 0 \Rightarrow$
- ordine di conv almeno 2
- $\exists\, [a,b]$ che verifica ip teo conv

• (int geometrica: metodo delle tangenti)



$y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$
(retta tangente al grafico di f in x_{k-1})

x t.c. $f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) = 0$

ovvero $x = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} = h(x_{k-1})$

Oss (scelta di x_0, metodo di Newt):

SE $[a,b]$, $f \in C^2(a,b)$, x_0 t.c.

1) $\exists\, \alpha \in [a,b]$ zero di f
2) $\forall x \in [a,b]$: $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0$ ($\Rightarrow \alpha$ unico zero...)
3) $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$

ALLORA: la success gen dal m di N a partire da x_0

a) è convergente ad α
b) è monotona.

(dim: graficamente, caso particolare ...)

Es: $f(x) = x + \log x$; decidere se sia utilizzabile il m di N per approssim lo zero di f.

- α zero di f in $[1/2, 1]$
- $f \in C^2\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
- $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ($\Rightarrow$ m di N utilizz!)
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$, success monotona crescente $\to \alpha$.

Oss: $\forall x > 0$: $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$

$\Rightarrow \forall x_0 \in (0, \alpha)$ la success gen dal m di N a partire da x_0 è convergente ad α e monotona.

Es: $f(x) = e^x + x - 3$

I) determ # zeri e separazione
II) decidere se m it def da $h(x) = 3 - e^x$ utilizz...
III) decidere se m di N utilizz...

- CRITERI d'ARRESTO (operando in $\mathbb{R}$)

1) h, $[a,b]$, x_0 che verif le ip del teo di conv;

dato $\delta > 0$:

$$\boxed{\text{SE } |h(x_k) - x_k| < \delta \text{ ALLORA STOP}}$$

- è calcolabile.
- è efficace:

$$|h(x_k) - x_k| = \begin{cases} \leq |h(x_k) - \alpha| + |\alpha - x_k| \leq L^k (L+1)|x_0 - \alpha| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \\ = \underbrace{|h(x_k) - h(x_{k-1})|}_{= \underbrace{|h'(\theta)|}_{\leq L < 1} |x_k - x_{k-1}|} < |h(x_{k-1}) - x_{k-1}| \quad \Downarrow \ \underline{\text{decrescente}} \end{cases}$$

- quando è verif (cr di tipo ASSOLUTO):

$$h(x_k) - x_k = h(x_k) - h(\alpha) - (x_k - \alpha)$$

$$= (h'(\theta_k) - 1)(x_k - \alpha) \quad \text{con } \theta_k \text{ tra } x_k \text{ ed } \alpha$$

$$\Rightarrow |h'(\theta_k)| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |x_k - \alpha| = \frac{|h(x_k) - x_k|}{1 - h'(\theta_k)} < \frac{\delta}{1 - h'(\theta_k)}$$

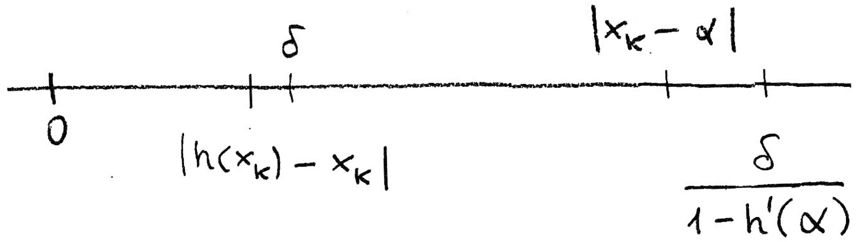
MA: $x_k \to \alpha \Rightarrow \theta_k \to \alpha$, q.di:

$$|x_k - \alpha| < \frac{\delta}{1 - h'(\theta_k)} \simeq \frac{\delta}{1 - h'(\alpha)}$$

SE $h'(\alpha) \simeq 0$ ALLORA $\dfrac{\delta}{1 - h'(\alpha)} \simeq \delta$: ok

invece, SE $h'(\alpha) \simeq 1$ ALLORA : $\dfrac{\delta}{1 - h'(\alpha)} \gg \delta$

ad es:



Oss: Il cr d'arr è BUONO per il m. di Newt (in tal caso $|h(x_k) - x_k| = \left|\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right|$).