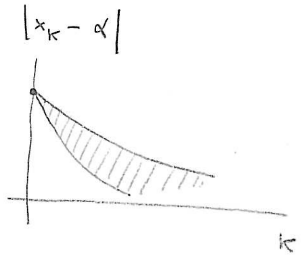
- $h_2(x)$: $\frac{1}{e} \leq |h_2'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} = L_2$, $x_0 = \frac{1}{2}$ ok

$\boxed{\text{Oss: } h_2'(x) < 0 \Rightarrow \text{le succes...}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^k |x_0 - \alpha| \leq |x_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k |x_0 - \alpha|$$



- $h_3(x)$: $\frac{1 - 1/\sqrt{e}}{2} \leq h_3'(x) \leq \frac{1 - 1/e}{2} = L_3$, $x_0 = \frac{1}{2}$ ok

$\boxed{\text{Oss: } h_3'(x) > 0 \Rightarrow \text{succes... e } \forall x_0 \text{...}}$

- $L_3 < L_2 \Rightarrow$ le succes gen dal m. it def da h_3 e' CERTAMENTE più veloce...

Oss: $[a,b]$, h, x_0 che verif teo conv

1) SE $0 < \lambda \leq |h'(x)| \leq L < 1$ ALLORA :

$$\lambda^k |x_0 - \alpha| \leq |x_k - \alpha| \leq L^\lambda |x_0 - \alpha|$$

2) SE $|h'(\alpha)| = 0$: $\forall \theta > 0$ si ha $\lim_{k \to \infty} \frac{|x_k - \alpha|}{\theta^k} = 0$

def (ordine di conv DEL METODO ad α)

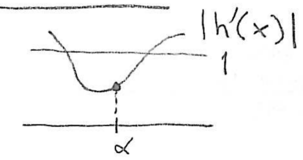
- $h \in C^1$, α p.u e $0 < |h'(\alpha)| < 1$; ORDINE DI CONV $\boxed{\text{UNO}}$
- $h \in C^2$, α p.u e $h'(\alpha) = 0$, $h''(\alpha) \neq 0$: O di C $\boxed{\text{DUE}}$

TEO (studio locale della conv)

$h \in C^1(a,b)$, α p.u

- $\underbrace{|h'(\alpha)| < 1}_{\text{condiz SUFF per conv loc}} \Rightarrow \exists$ int che verifica ip teo conv loc

Es:

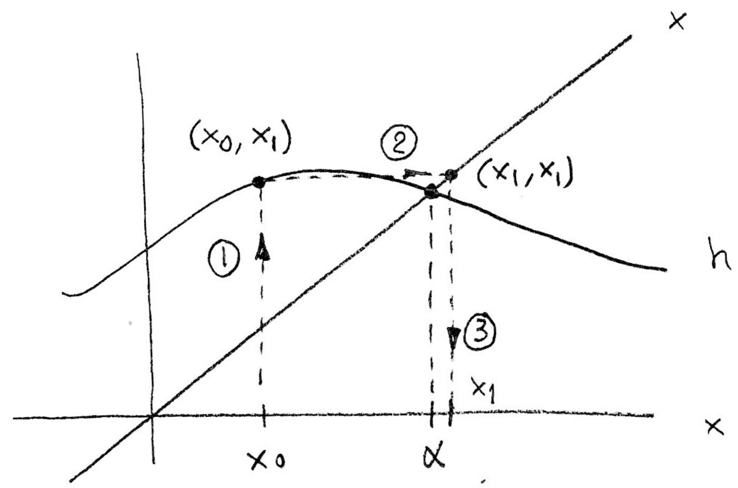


- $|h'(\alpha)| > 1 \Rightarrow \nexists$ int che verifica ip teo conv loc

INOLTRE : $\rightsquigarrow$ $x_k = \alpha$ per qualche k

$\rightsquigarrow$ $x_k \not\to \alpha$ per $k \to \infty$.

- costruzione grafica di x_{k+1} ...



$x_1 = h(x_0)$

① retta vert di ascissa x_0, fino al grafico di h ;
② retta orizz per (x_0, x_1), fino al grafico di x ;
③ retta vert per (x_1, x_1), fino all'asse delle ascisse.

Problema 3

Sia $h(x) = \frac{1}{9} - 3x^3$.

(a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo ed operando in $\mathbb{R}$ risulta convergente.