Oss:

(1) siano $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una f. elementare e $\varphi:\Omega\cap M\to M$ la f. predef corrisp ad f $\left(\forall \xi\in\Omega\cap M,\ \varphi(\xi)=rd(f(\xi))\right)$.

Se $\Phi:\Omega\to M$ def da $\Phi(x)=\varphi(rd(x))$
allora: Φ è un algo STABILE quando util'zz per appross f (vedi nota a piè di pagina).

dim:
- $\forall x\ \exists \varepsilon_1\in\mathbb{R}:\ \Phi(x)=\varphi((1+\varepsilon_1)x)$ E $|\varepsilon_1|\le u$
- $\forall x\ \exists \varepsilon_2\in\mathbb{R}:\ \Phi(x)=(1+\varepsilon_2)f((1+\varepsilon_1)x)$ E $|\varepsilon_2|\le u$.

(2) Sia $\circledast$ una pseudo-op aritmetica.
se $\Phi(x_1,x_2)=rd(x_1)\circledast rd(x_2)$, $x_1,x_2\in$ ins def $*$,
allora: Φ è un algo STABILE quando util'zz per appross $x_1 * x_2$.

dim:
- $\forall x_1,x_2\ \exists \varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbb{R}:\ \Phi(x_1,x_2)=(1+\varepsilon_1)x_1\circledast(1+\varepsilon_2)x_2$ E $|\varepsilon_1|\le u,\ |\varepsilon_2|\le u$
- $\forall x_1,x_2\ \exists \varepsilon_3\in\mathbb{R}:\ \Phi(x_1,x_2)=(1+\varepsilon_3)\left[(1+\varepsilon_1)x_1 * (1+\varepsilon_2)x_2\right]$ E $|\varepsilon_3|\le u$

(3) siano $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $\varphi:\mathbb{R}\to M$, $\gamma:\mathbb{R}\to M$ algo STABILI quando util'zz per appross f, g.
Allora, posto $\Phi(x)=\gamma(\varphi(x))$ si ha:

$\forall x\ \exists \varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\in\mathbb{R}:$

$$\Phi(x)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{STAB di } \varphi\ldots}}{=}\gamma\Big((1+\varepsilon_1)f((1+\varepsilon_2)x)\Big)=$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{STAB di } \gamma\ldots}}{=}(1+\varepsilon_3)\,g\Big((1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_1)f((1+\varepsilon_2)x)\Big)$$

E $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_4$ piccoli.

- $(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_1)=1+\theta_1$
con $\theta_1=\varepsilon_4+\varepsilon_1+\varepsilon_4\varepsilon_1$ che risulta piccolo;

$$\Rightarrow\ \Phi(x)=(1+\varepsilon_3)\,g\Big((1+\theta_1)f((1+\varepsilon_2)x)\Big)$$

SE il calcolo di g in $f((1+\varepsilon_2)x)$ è BEN CONDIZIONATO allora $\exists\,\theta_2\in\mathbb{R}$ t.c.

$$\Phi(x)=(1+\varepsilon_3)(1+\theta_2)\,g\Big(f((1+\varepsilon_2)x)\Big)$$

E θ_2 piccolo

$\Rightarrow$ Φ algo STABILE quando util'zz per appross $g(f(x))$.

SE il calcolo di g in $f((1+\varepsilon_2)x)$ NON È BEN CONDIZIONATO allora

$\boxed{\Phi \text{ PUÓ NON ESSERE un algo stabile quando util'zz per appross } g(f(x))}$

[NOTA: L'ins di def di Φ è, più correttamente: $\tilde{\Omega}=\{x\in\Omega \text{ t.c. } rd(x)\in\Omega\}$]

Es:

(1) Siano $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ def da $f(x) = x + \sqrt{x}$

e $\varphi: [0,+\infty) \to M$ l'algo def da

$$\varphi(x) = rd(x) \oplus SQRT(rd(x))$$

Mostrare che φ è un algo STABILE quando utilizz per appross f su $x>0$.

(2) Siano $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ def da $f(x) = x - \sqrt{x}$

e $\varphi: [0,+\infty) \to M$ l'algo def da

$$\varphi(x) = rd(x) \ominus SQRT(rd(x))$$

Per $x \neq 0$ e $x \neq 1$, studiare la stabilità di φ quando utilizz per appross f.

(3) Sia $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ def da $f(x) = x - \sqrt{x}$.

Per ogni $x > 0$ si ha:

$$f(x) = \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}} = \frac{x^2 - x}{x+\sqrt{x}} = \frac{x(x-1)}{x+\sqrt{x}}$$

Studiare la stabilità dell'algo $\varphi: [0,+\infty) \to M$ def da:

- $\varphi(0) = 0$
- per $x > 0$:

$$\varphi(x) = [rd(x) \otimes (rd(x) \ominus 1)] \oslash [rd(x) \oplus SQRT(rd(x))]$$

quando utilizz per appross f su $(0,+\infty)$.

Soluzioni

$\exists \varepsilon_0 \in \mathbb{R} \dots$

(1) $$\varphi(x) = ((1+\varepsilon_0)x) \oplus SQRT((1+\varepsilon_0)x)$$

$$= ((1+\varepsilon_0)x) \oplus (1+\varepsilon_1)\sqrt{(1+\varepsilon_0)x}$$

$\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R} \dots$

$$= (1+\varepsilon_2)\left[(1+\varepsilon_0)x + (1+\varepsilon_1)\sqrt{(1+\varepsilon_0)x}\right]$$

$\exists \varepsilon_2 \in \mathbb{R} \dots$

- $\xi = (1+\varepsilon_0)x \;\Rightarrow\; \varphi(x) = (1+\varepsilon_2)\left(\xi + (1+\varepsilon_1)\sqrt{\xi}\right)$

- $\xi + (1+\varepsilon_1)\sqrt{\xi} = (1+\theta)(\xi + \sqrt{\xi})$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\xi + (1+\varepsilon_1)\sqrt{\xi}}{\xi + \sqrt{\xi}} - 1 = \frac{\cancel{\xi} + \cancel{\sqrt{\xi}} + \varepsilon_1\sqrt{\xi} - \cancel{\xi} - \cancel{\sqrt{\xi}}}{\xi + \sqrt{\xi}}$$

$$= \frac{\sqrt{\xi}}{\xi + \sqrt{\xi}}\varepsilon_1 \;\Rightarrow\; |\theta| \le |\varepsilon_1| \le u$$

- $\varphi(x) = (1+\varepsilon_2)(1+\theta)\left((1+\varepsilon_0)x + \sqrt{(1+\varepsilon_0)x}\right)$

$$= (1+\gamma)\, f\left((1+\varepsilon_0)x\right), \quad |\gamma| \le 2u + u^2 \simeq 2u$$

$$\boxed{\forall x,\ \varphi \text{ algo STABILE quando utilizz per appross } f}$$

∃ $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$...

(2) $\varphi(x) = \left((1+\varepsilon_0)x\right) \ominus \mathrm{SQRT}\left((1+\varepsilon_0)x\right)$

$$= \left((1+\varepsilon_0)x\right) \ominus (1+\varepsilon_1)\sqrt{(1+\varepsilon_0)x}$$

∃ $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$...

$$= \left[(1+\varepsilon_0)x - (1+\varepsilon_1)\sqrt{(1+\varepsilon_0)x}\right](1+\varepsilon_2)$$

∃ $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$...

- $\xi = (1+\varepsilon_0)x \Rightarrow \varphi(x) = (1+\varepsilon_2)\left(\xi - (1+\varepsilon_1)\sqrt{\xi}\right)$
- $\xi - (1+\varepsilon_1)\sqrt{\xi} = (1+\theta)\left(\xi - \sqrt{\xi}\right)$

$$\Rightarrow \theta =$$

$$= -\frac{\sqrt{\xi}}{\xi - \sqrt{\xi}}\varepsilon_1 \ ; \quad |\theta| \le \underbrace{\left|\frac{\sqrt{\xi}}{\xi-\sqrt{\xi}}\right|}_{=\,\kappa(\xi)} u$$

- $\varphi(x) = (1+\varepsilon_2)(1+\theta)\left(\xi - \sqrt{\xi}\right) = (1+\Gamma)\, f\left((1+\varepsilon_0)x\right)$

$$\Gamma \le \left(1 + \kappa(\xi)\right)u + \kappa(\xi)u^2$$

- $\kappa(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{|x - \sqrt{x}|} = \dfrac{1}{|\sqrt{x} - 1|}$

$$\lim_{x \to 0^+} \kappa(x) = 1, \quad \boxed{\lim_{x \to 1} \kappa(x) = +\infty}$$

Es: Usare Scilab per disegnare il grafico della funzione $\kappa(x)$ su $[0,1) \cup (1,10]$.

(3) Posto $\xi = rd(x)$, $F_1(x) = x(x-1)$, $\Phi_1(x) = \xi \overset{2}{\otimes} (\xi \overset{1}{\ominus} 1)$, $F_2(x) = x + \sqrt{x}$ e $\Phi_2(x) = \xi \overset{4}{\oplus} \overset{3}{\mathrm{SQRT}}(\xi)$ si ha:

- ∃ $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $|\varepsilon_0| \le u$, $|\varepsilon_1| \le u$, $|\varepsilon_2| \le u$ e

$$\Phi_1(x) = \xi \otimes (1+\varepsilon_1)(\xi - 1) = (1+\varepsilon_2)\,\xi\,(1+\varepsilon_1)(\xi-1)$$

$$= (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\,\xi(\xi-1) = (1+\theta)\, F_1\left((1+\varepsilon_0)x\right)$$

con $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ e $|\theta| \le 2u + u^2 \simeq 2u$

Q.di: Φ_1 è un algo STABILE quando utilizz per appross F_1.

- Per quanto mostrato nell'Es. 1, Φ_2 è un algo stabile quando utilizz per appross F_2 su $(0,+\infty)$, infatti: ∃ $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\Phi_2(x) = (1+\varepsilon_3)\, F_2\left((1+\varepsilon_0)x\right) \quad \text{E} \quad \varepsilon_3 \text{ piccolo.}$$

• $\exists\, \varepsilon_5 \in \mathbb{R}$ t.c. $|\varepsilon_5| \le u$ e

$$\varphi(x) = \Phi_1(x) \oslash \Phi_2(x) = \frac{(1+\theta)\, F_1((1+\varepsilon_0)x)}{(1+\varepsilon_3)\, F_2((1+\varepsilon_0)x)} (1+\varepsilon_5)$$

$$= \frac{(1+\theta)(1+\varepsilon_5)}{1+\varepsilon_3} \frac{F_1((1+\varepsilon_0)x)}{F_2((1+\varepsilon_0)x)} = (1+\Gamma)\, f((1+\varepsilon_0)x) ,$$

$$\Gamma = \frac{(1+\theta)(1+\varepsilon_5)}{1+\varepsilon_3} - 1 = \frac{\theta - \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \theta\varepsilon_5}{1+\varepsilon_3}$$

$$\text{e} \quad |\Gamma| \le \frac{2u+u^2+2u+(2u+u^2)u}{1-u} =$$

$$= \frac{4u+3u^2+u^3}{1-u} \simeq 4u$$

Dunque: l'algo φ è STABILE quando utilizz per appross f su $(0,+\infty)$.

---

1 ZERI di FUNZIONI REALI di UNA VARIABILE

Pb: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, det $\alpha \in [a,b]$ t.c. $f(\alpha)=0$

"ZERO di f"

• Metodo di bisezione

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont ; $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
se $g(x_1)\, g(x_2) < 0 \Rightarrow \exists$ zero di g tra x_1 e x_2

idea: utilizz TEO esistenza zeri per ottenere una succes di INTERVALLI I_k, ciascuno contenenti uno zero di f, t.c. $I_{k+1} \subset I_k$ e $\lim_{k\to\infty} \text{mis}\, I_k = 0$.

descriz del m di bisez (OPERANDO in $\mathbb{R}$)

dati: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ t.c. $f(a)\,f(b) < 0$

$a_0 = a$; $b_0 = b$, $I_0 = [a_0, b_0]$, $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$;

per $k = 1,2,\dots$ ripeti

se $f(x_{k-1}) = 0$ allora STOP altrimenti

- se $f(x_{k-1})\, f(b_{k-1}) < 0$ allora $a_k = x_{k-1}$, $b_k = b_{k-1}$;
- se $f(a_{k-1})\, f(x_{k-1}) < 0$ allora $a_k = a_{k-1}$, $b_k = x_{k-1}$;
- $I_k = [a_k, b_k]$, $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$

uscita: quando un opportuno CRITERIO D'ARRESTO è verificato: x_k.

Oss: $\text{mis}\, I_k = \frac{\text{mis}\, I_{k-1}}{2} = \frac{\text{mis}\, I_{k-2}}{2^2} = \dots = \frac{\text{mis}\, I_0}{2^k}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \text{mis}\, I_k = 0$

• SE f continua, ciascun I_k contiene uno zero e $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$ t.c. $f(\alpha) = 0$.