STUDIO GENERALE (caso particolare: funzioni di una var.)

def: (algo ACCURATO; a. STABILE; calcolo BEN CONDIZ)

Siano: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$;

$\phi : \mathbb{R} \to M = F(\beta, m)$ ("algoritmo")

(A) ϕ è un algoritmo ACCURATO quando utilizzato per approssimare $f(x)$ SE: $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\phi(x) = (1+\varepsilon)\, f(x) \quad \text{E} \quad \varepsilon \text{ piccolo}$$

(B) ϕ è un algoritmo STABILE quando utilizzato per approssimare $f(x)$ SE: $\exists\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\phi(x) = (1+\varepsilon_1)\, f((1+\varepsilon_2)x) \quad \text{E} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ piccoli}$$

(C) Il calcolo di f in x è BEN CONDIZIONATO SE: $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}$, piccolo, $\exists\, \varepsilon_d \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f((1+\varepsilon)x) = (1+\varepsilon_d)\, f(x) \quad \text{E} \quad \varepsilon_d \text{ piccolo}$$

Oss:

(A) Per $f(x) \neq 0$ si ha $\varepsilon = \dfrac{\phi(x) - f(x)}{f(x)}$ (l'err rel commesso utilizz $\phi(x)$ per appross $f(x)$).

(B) Posto $\tilde{x} = (1+\varepsilon_2)x$, per $x \neq 0$ si ha

$\varepsilon_2 = \dfrac{\tilde{x} - x}{x}$ e, per $f(x) \neq 0$ si ha

$\varepsilon_1 = \dfrac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$. Un algo stabile quando utilizz per appross $f(x)$ calcola "una appross accurata (ε_1 piccolo) del valore di f in un punto $\tilde{x}$ vicino (ε_2 piccolo) ad x."

(C) Per $f(x) \neq 0$ si ha $\varepsilon_d = \dfrac{f((1+\varepsilon)x) - f(x)}{f(x)}$

(l'err rel trasm dai dati).

TEO (stab + buon condiz $\Rightarrow$ accuratezza)

Siano: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $\phi : \mathbb{R} \to M$.
Se ϕ è un algo STABILE quando utilizz per appross $f(x)$ E il calcolo di f in x è BEN CONDIZ ALLORA ϕ è un algo ACCURATO quando utilizz per appross $f(x)$.

dim:

- $\phi(x) \underset{\uparrow}{=} (1+\varepsilon_1)\, f((1+\varepsilon_2)x)$, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ piccoli

  STABILITÀ

- $f((1+\varepsilon_2)x) \underset{\uparrow}{=} (1+\varepsilon_d)\, f(x)$, con ε_d piccolo

  BUON CONDIZ

$\Rightarrow \phi(x) = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_d)\, f(x) = (1+\theta)\, f(x)$

con $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_d + \varepsilon_1 \varepsilon_d$, CHE RISULTA piccolo.

Es: (1) $f_1(x) = \text{sen}\, x$; $\phi_1(x) = \text{SEN}\left(rd(x)\right)$

- STABILITA'

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\phi_1(x) = \text{SEN}\left((1+\varepsilon_1)x\right) = (1+\varepsilon_2)\,\text{sen}\left((1+\varepsilon_1)x\right)$$

E $|\varepsilon_1| \leq u$, $|\varepsilon_2| \leq u$

$\forall x$, ϕ_1 è un algo STABILE quando utilizz per appross $f_1(x)$

- CONDIZIONAMENTO

Per f regolare:

$$f((1+\varepsilon)x) = f(x+\varepsilon x) =$$

$$= f(x) + \varepsilon x\, f'(x) + \frac{1}{2}(\varepsilon x)^2 f''(\theta)$$

con θ tra x e $(1+\varepsilon)x$.

Dunque, per $f(x) \neq 0$ si ha:

$$\frac{f((1+\varepsilon)x) - f(x)}{f(x)} = \varepsilon \frac{x f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 x^2 \frac{f''(\theta)}{f(x)}$$

def: (num di condiz)

$$c(f,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{f((1+\varepsilon)x) - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|$$

NUMERO di condiz del calcolo di f in x

Se $c(f,x) \neq 0$, per ε piccolo:

$$\left| \frac{f((1+\varepsilon)x) - f(x)}{f(x)} \right| \simeq c(f,x)\,|\varepsilon|$$

Il calcolo di f in x è BEN CONDIZIONATO solo se il numero di condiz ... non è grande.

Per $f_1(x) = \text{sen}\, x$: $c(\text{sen}, x) = \left| \frac{x \cos x}{\text{sen}\, x} \right|$.

Es: In scilab, definire una funzione di intestazione:

function y = NumCondSen (x)

che calcola il numero di condizionam del calcolo di sen x. Utilizz il comando plot per disegnare il grafico della funzione su $(0, \pi)$ e $(100\pi, 101\pi)$.

Es: calcolare $c\left(\text{sen}, \frac{\pi}{2}\right)$, $c\left(\text{sen}, \frac{3}{4}\pi\right)$,

$\lim_{\alpha \to 0} c(\text{sen}, \alpha)$, $\lim_{\alpha \to \pi} c(\text{sen}, \alpha)$

---

(2) $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$, $\phi_2(x) = 1 \oslash \text{SQRT}\left(rd(x)\right)$

- STABILITA'

$\forall x\ \exists\ \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\phi_2(x) = 1 \oslash \text{SQRT}\left((1+\varepsilon_0)x\right) =$$

$$= 1 \oslash (1+\varepsilon_1)\sqrt{(1+\varepsilon_0)x} = \frac{1+\varepsilon_2}{(1+\varepsilon_1)\sqrt{(1+\varepsilon_0)x}}$$

$$= \frac{1+\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)x}} = (1+\theta)\, f_2((1+\varepsilon_0)x)$$

con $\theta = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}$ e $|\theta| \le \frac{2u}{1-u}$, $|\varepsilon_0| \le u$

$|\varepsilon_1| \le u$, $|\varepsilon_2| \le u$

$\forall x$, ϕ_2 e' un algo STABILE quando utilizz per appross $f_2(x)$.

• CONDIZIONAMENTO

$$c\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, x\right) = \left| \frac{x\left(-\frac{1}{2} x^{-3/2}\right)}{x^{-1/2}} \right| = \left| -\frac{1}{2} x^{1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} \right|$$

$$= \frac{1}{2}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, il calcolo di f_2 in x e' BEN CONDIZIONATO.

$\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, ϕ_2 e' un algo ACCURATO quando utilizz per appross $f_2(x)$

(3) $f_3(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ $(x > 0)$, $\phi_3(x) = \mathrm{SQRT}(rd(x)) \oslash rd(x)$

• STABILITA'

$\forall x \ \exists \ \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ t.c

$$\begin{aligned}
\phi_3(x) &= \mathrm{SQRT}((1+\varepsilon_0)x) \oslash ((1+\varepsilon_0)x) \\
&= (1+\varepsilon_1)\sqrt{(1+\varepsilon_0)x} \oslash ((1+\varepsilon_0)x) \\
&= \frac{(1+\varepsilon_1)\sqrt{(1+\varepsilon_0)x}}{(1+\varepsilon_0)x}(1+\varepsilon_2) = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\frac{\sqrt{(1+\varepsilon_0)x}}{(1+\varepsilon_0)x} \\
&= (1+\theta)\, f_3((1+\varepsilon_0)x)
\end{aligned}$$

con $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ e $|\theta| \le 2u + u^2 \simeq 2u$,

$|\varepsilon_1| \le u$, $|\varepsilon_2| \le u$ $\quad |\varepsilon_0| \le u$

$\forall x$, ϕ_3 e' un algo STABILE quando utilizz per appross $f_3(x)$

• Il condiz di f_3 e' gia' stato studiato ($f_3 = f_2$ ...)

$\Rightarrow$ $\forall x$, ϕ_3 e' un algo ACCURATO quando utilizz per appross $f_3(x)$