Es

(1) Cons **due** algoritmi per appross $x = 1/\sqrt{2}$ $(\notin F(2,53))$:

$$\alpha_A = 1 \oslash SQRT(2) \qquad \left[\forall \xi \geq 0,\ SQRT(\xi) = rd(\sqrt{\xi})\right]$$
$$\alpha_B = SQRT(2) \oslash 2$$

- L'origine dei due algoritmi è evidente.
- In Scilab:

> $\alpha_A == \alpha_B$

ans = F

- Se voglio appross x, quale dei due algo è preferibile utilizzare?

- $\varepsilon_A = \dfrac{\alpha_A - x}{x}$ ovvero: $\alpha_A = x(1+\varepsilon_A)$
- Riscrivo α_A: numero le f.p. usate... .

$$\alpha_A = 1 \boxed{\oslash}_{2}\ SQRT(2)_{\boxed{1}} = 1 \oslash (\sqrt{2}(1+\varepsilon_1)) = \dots$$

$\exists\, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ t.c. $SQRT(2) = \sqrt{2}(1+\varepsilon_1)$ e $|\varepsilon_1| \leq u$

$\forall \xi_1, \xi_2 \neq 0\ \exists\, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\xi_1 \oslash \xi_2 = (\xi_1/\xi_2)(1+\varepsilon_2)$ e $|\varepsilon_2| \leq u$

$$\dots = \frac{1+\varepsilon_2}{\sqrt{2}(1+\varepsilon_1)}$$

- Interpreto il risultato:

Posto $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$, si ha:

$$\alpha_A = f(1\cdot(1+\varepsilon_2), \sqrt{2}(1+\varepsilon_1)) \quad e \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = f(1, \sqrt{2})$$

OVVERO: α_A è il valore di f calcolato in un punto $((1\cdot(1+\varepsilon_2), \sqrt{2}(1+\varepsilon_1)))$ vicino ($|\varepsilon_2| \leq u \Rightarrow 1\cdot(1+\varepsilon_2) \simeq 1$; $|\varepsilon_1| \leq u \Rightarrow \sqrt{2}(1+\varepsilon_1) \simeq \sqrt{2}$) a quello $((1, \sqrt{2}))$ nel quale avrei voluto conoscere il valore di f.

Q.di:
$$\varepsilon_A = \frac{f(1\cdot(1+\varepsilon_2), \sqrt{2}(1+\varepsilon_1)) - f(1,\sqrt{2})}{f(1,\sqrt{2})}$$

ovvero: $f(1\cdot(1+\varepsilon_2); \sqrt{2}(1+\varepsilon_1)) = (1+\varepsilon_A)\, f(1, \sqrt{2})$

def (f. di CONDIZIONAMENTO):

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\forall x_1, \dots, x_n$ t.c. $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ e $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$:

$$C_f(x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \frac{f(x_1(1+\varepsilon_1), \dots, x_n(1+\varepsilon_n)) - f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)}$$

FUNZIONE di CONDIZIONAMENTO del calcolo di f in $x_1, \dots, x_n$

- Nel caso in esame: $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$ e $\forall x_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$: $C_f(x_1, x_2; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}$

(dim ...)

Dunque: $\varepsilon_A = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \Rightarrow \boxed{|\varepsilon_A| \leq \dfrac{2u}{1-u} \simeq 2u}$

Abbiamo trovato un limite superiore dell'errore relativo commesso approssimando $1/\sqrt{2}$ con α_A.

Oss:

- studiare il condiz del calcolo di f in $x_1, \dots, x_n$ significa studiare quanto grande può essere $|C_f(x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)|$ per $|\varepsilon_1| \leq \lambda, \dots, |\varepsilon_n| \leq \lambda$ e λ piccolo.

- Se risulta che $|C_f(x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)| >> \lambda$, il calcolo di $f(x_1, \dots, x_n)$ si dice MAL CONDIZIONATO; altrimenti BEN CONDIZIONATO.

- Nel contesto dello studio del condizionam, x_k si chiama dato k-esimo, ε_k errore (relativo) sul dato k-esimo e

$$\varepsilon_d = \frac{f((1+\varepsilon_1)x_1, \dots, (1+\varepsilon_n)x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)}$$

errore (relativo) trasmesso dai dati.

La f. di condiz esprime dunque l'err trasm dai dati in termini di dati ed err sui dati.

- $\varepsilon_B = \dfrac{\alpha_B - x}{x}$ ovvero: $\alpha_B = x(1+\varepsilon_B)$

- Riscrivo α_B:

$$\alpha_B = \overset{\boxed{1}}{\text{SQRT}(2)} \overset{\boxed{2}}{\oslash} 2 = \sqrt{2}(1+\varepsilon_1) \oslash 2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\varepsilon_1)$$

$\boxed{\forall \xi \in F(2,m),\ \xi \oslash 2 = \xi/2}$

- In questo caso si ha direttamente:

$\varepsilon_B = \varepsilon_1 \Rightarrow \boxed{|\varepsilon_B| \leq u}$

RISPOSTA: Per appross $1/\sqrt{2}$ è preferibile $\alpha_B = \text{SQRT}(2) \oslash 2$.
Infatti, anche se non sappiamo quale tra ε_A ed ε_B sia più grande, sappiamo che

$\boxed{\text{estremo sup per } \varepsilon_B < \text{estremo sup per } \varepsilon_A}$

---

(2) In Scilab:

```
> x = sen(%pi)
x = 1,225 D-16
```

In Scilab, %pi è una costante (il cui valore non può essere riassegnato — Es: cosa accade se eseguo l'istruzione: > %pi = 3 ?) che vale rd(π). Allora:

$$x = \mathrm{SEN}(\%pi) = \mathrm{SEN}((1+\varepsilon_1)\pi) = \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\%pi = rd(\pi) = (1+\varepsilon_1)\pi \\ \text{per qualche } \varepsilon_1 \in \mathbb{R} \text{ t.c.} \\ |\varepsilon_1| \le u\end{array}}$$

$$\ldots = (1+\varepsilon_2)\,\mathrm{sen}\,(1+\varepsilon_1)\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall \xi,\ \mathrm{SEN}\,\xi = rd(\mathrm{sen}\,\xi) = \\ \quad = (1+\varepsilon)\,\mathrm{sen}\,\xi \text{ per qualche} \\ \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |\varepsilon| \le u\end{array}}$$

- Occorre studiare il condizionamento del calcolo di $\mathrm{sen}\,\pi$:

$$\mathrm{sen}((1+\varepsilon)\alpha) = \mathrm{sen}(\alpha + \varepsilon\alpha) = \mathrm{sen}\,\alpha + \varepsilon\alpha\cos\theta,$$

θ tra α e $\alpha(1+\varepsilon)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{sen}(x+h) = \mathrm{sen}\,x + h\cos\theta \\ \quad \text{con } \theta \text{ tra } x \text{ e } x+h \\ \text{(Teo. di LAGRANGE)}\end{array}}$$

Inoltre: $\lim_{\varepsilon \to 0} \cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \mathrm{sen}((1+\varepsilon)\alpha) \simeq \mathrm{sen}\,\alpha + \varepsilon\alpha\cos\alpha$

Allora: $\mathrm{sen}\,(1+\varepsilon_1)\pi \simeq \mathrm{sen}\,\pi + \varepsilon_1\pi\cos\pi = -\varepsilon_1\pi$

[Oss: la retta tangente a $\mathrm{sen}\,x$ in $x=\pi$ è $y = \pi - x$ e quindi!...]

- Con il risultato ottenuto:

$$x = \mathrm{SEN}(\%pi) \simeq (1+\varepsilon_2)(-\varepsilon_1\pi)$$

e $\left|(1+\varepsilon_2)(-\varepsilon_1\pi)\right| \le u(1+u)\pi \simeq \pi u$

coerente con il valore restituito da Scilab ($\pi u \simeq 3{,}5 \cdot 10^{-16}$).