Lezione 34 (ora 58) - 24 maggio 2016, 10:30 - 11:30 F07

---

* METODO TS(2) *

(34.01) Ipotesi (regolarità delle soluzioni).

Supponiamo che *tutte* le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = F(t,x(t))$ abbiano *derivata terza continua*.

La richiesta è certamente soddisfatta se *tutte* le derivate parziali *seconde* della funzione F che definisce il Problema di Cauchy *esistono* e sono funzioni *continue* di t ed x.

(Infatti:

$$G_2(t,x) = \partial_t F(t,x) + \partial_x F(t,x) \cdot F(t,x)$$

ha derivate parziali prime continue e quindi:

$$G_3(t,x) = \partial_t G_2(t,x) + \partial_x G_2(t,x) \cdot F(t,x)$$

è continua. Allora, se y(t) è soluzione dell'equazione differenziale:

$$y^{(3)}(t) = (y''(t))' = (G_2(t,y(t)))' = G_3(t,y(t))$$

è continua perché lo sono $G_3(t,x)$ ed y(t).)

(34.02) Definizione (metodo TS(2)).

Il *metodo* TS(2) è definito dalle procedure seguenti.

- SCELTA di h(k). Dati $E > 0$ e $\lambda > 0$, per ogni k si pone:

  $$d(k) = \max \{ \lambda , || y^{(3)}(t(k); x(k),t(k)) || \}$$

  e poi:

  $$h(k) = \min \{ \sqrt[3]{\frac{6E}{d(k)}} , tf - t(k) \}$$

- CALCOLO di x(k+1). Dopo aver scelto h(k) si pone:

  $$x(k+1) = x(k) + F(t(k),x(k)) h(k) + \frac{1}{2} G_2(t(k),x(k)) h(k)^2$$

(34.03) Osservazione (sulla scelta di h(k)).

Indicando con y(t) la soluzione y(t; x(k),t(k)) dell'equazione differenziale, per lo scostamento s(h) tra y(t(k) + h) e l'approssimazione calcolata dal metodo con un passo di lunghezza h a partire da (t(k),x(k)) si ha, utilizzando lo sviluppo di Taylor di y(t(k) + h):

$$s(h) = -\frac{1}{6}\,(y^{(3)}(t(k)) + z(h))\,h^3 \qquad \text{con: } z(h) \to 0 \text{ per } h \to 0$$

Se $y^{(3)}(t(k))$ non è zero *allora*:

- *per* h *piccolo*: $-\frac{1}{6}\,y^{(3)}(t(k))\,h^3$ *è una buona stima di* s(h)
- si ha:

$$\left\|\,-\frac{1}{6}\,y^{(3)}(t(k))\,h^3\,\right\| = E \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt[3]{\frac{6E}{\|\,y^{(3)}(t(k))\,\|}}$$

(34.04) Osservazione (convergenza di TS(2)).

Per la convergenza del metodo TS(2) si dimostra, analogamente a quanto fatto per il metodo di Eulero esplicito, che: *se*

$$\text{esiste } C_3 \text{ tale che per ogni } (t,x)\text{: } \|\,G_3(t,x)\,\| \leqslant C_3$$

allora:

- Il metodo raggiunge tf in *al più*, posto M = max { λ , C_3 }:

$$N_{max} = \text{int}\left(\,(tf - to)\,\sqrt[3]{\frac{M}{6E}}\,\right)$$

  passi.

- Per l'errore totale si ha:

$$ET(k) \;\leqslant\; EL(k) + e^{L\,h(k-1)}\,EL(k-1) + \ldots + e^{L\,(h(k-1) + \ldots + h(1))}\,EL(1)$$

  da cui, essendo:

$$EL(j) \;\leqslant\; \frac{1}{6}\,C_3\,h(j-1)^3$$

  e posto hmax = max { h(1),...,h(N-1) } si ottiene:

$$ET(k) \;\leqslant\; \frac{1}{6}\,C_3\,hmax^2\,\frac{e^{L\,(tf - t0)} - 1}{L}$$

  Poiché, infine:

$$hmax \;\leqslant\; \sqrt[3]{\frac{6E}{\lambda}}$$

si ricava:

$$ET(k) \leqslant \frac{1}{6} C_3 \left(\frac{6E}{\lambda}\right)^{2/3} \frac{e^{L\,(tf - t0)} - 1}{L}$$

(34.05) Definizione (ordine di convergenza per $E \to 0$).

Un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del Problema di Cauchy (§) ha *ordine di convergenza* q *per* $E \to 0$ se:

- per ogni t0, tf ed x0 il metodo è convergente
- esiste un numero reale c tale che:

$$\text{per ogni } k\text{: } ET(k) \leqslant c\, E^q$$

(34.06) Osservazione (sull'ordine di convergenza).

La nozione di ordine di convergenza riguarda il comportamento dell'errore totale rispetto al valore del parametro controllato dall'utilizzatore. In base ai risultati di convergenza, il metodo di Eulero esplicito ha ordine di convergenza 1/2, il metodo TS(2) ha ordine di convergenza 2/3.

Se si utilizzano *due* metodi numerici per approssimare la soluzione di uno *stesso* Problema di Cauchy, *a parità di valore assegnato ad* E è ragionevole aspettarsi che il metodo con *ordine di convergenza maggiore* ottenga un *errore totale più piccolo* e raggiunga l'istante finale con un *numero di passi inferiore* rispetto all'altro.

(34.07) Definizione (ordine di un metodo per $h \to 0$).

Si consideri un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del Problema di Cauchy (§) e sia $s(h;\ \xi,\tau)$ lo scostamento tra $y(\tau+h;\ \xi,\tau)$ e l'approssimazione calcolata dal metodo con un passo di lunghezza h a partire da (ξ,τ).

Si chiama *ordine* del metodo *per* $h \to 0$ l'intero p tale che:

- Per ogni ξ,τ si ha $s^{(j)}(0;\ \xi,\tau) = 0$ per $j = 0, 1, \ldots, p$;
- Per qualche ξ,τ il valore di $s^{(p+1)}(0;\ \xi,\tau)$ non è zero.

In tal caso:

- $s(h;\ \xi,\tau) = \dfrac{1}{(p+1)!}\left(s^{(p+1)}(0;\ \xi,\tau) + z(h) \right) h^{(p+1)}$ con $z(h) \to 0$ per $h \to 0$;
- *se* $s^{(p+1)}(0;\ \xi,\tau)$ non è zero *allora*:

per h piccolo $\frac{1}{(p+1)!} s^{(p+1)}(0;\ \xi,\tau)\ h^{(p+1)}$ è una buona stima di $s(h;\ \xi,\tau)$

e:

$$\left\| \frac{1}{(p+1)!} s^{(p+1)}(0;\ \xi,\tau)\ h^{(p+1)} \right\| = E \iff h = \sqrt[p+1]{\frac{(p+1)!\ E}{\| s^{(p+1)}(0;\ \xi,\tau) \|}}$$

(34.08) Osservazione (sull'ordine per h → 0).

- L'ordine di un metodo per h → 0 riguarda il comportamento dello scostamento rispetto al valore del parametro h. Dunque dipende da come il metodo calcola x(k+1), ma *non* da come sceglie il passo.

- Si verifica facilmente che il metodo di Eulero esplicito ha ordine 1 per h → 0 e che il metodo TS(2) ha ordine 2 per h → 0.

- *Se* un metodo di ordine p per h → 0 è applicato ad un Problema di Cauchy la cui funzione F(t,x) assicura il sussiste della limitazione:

  esiste C tale che per ogni ξ,τ e h si ha: $\| s^{(p+1)}(h;\ \xi,\tau) \| \leqslant C$

  allora:

  per ogni ξ,τ si ha: $\| s(h;\ \xi,\tau) \| \leqslant \frac{1}{(p+1)!}\ C\ h^{(p+1)}$

  In tal caso, come si constata rileggendo le dimostrazioni dei risultati di convergenza relative ai metodi di Eulero esplicito e TS(2) e ricordando che:

  EL(j) = s(h(j-1); x(j-1),t(j-1))

  il metodo risulta avere ordine di convergenza $\frac{p}{p+1}$ per E → 0

  L'ordine di convergenza di un metodo per E → 0 è dunque determinato dal suo ordine per h → 0.

(34.09) Teorema (convergenza di un metodo di ordine p per h → 0)

Siano t0 un numero reale, F una funzione definita in R x R(n) a valori in R(n) ed x0 in R(n) e si consideri il Problema di Cauchy

(§) x'(t) = F(t,x(t)) , x(t0) = x0

Sia infine *M* un metodo numerico di ordine p per h → 0.

Se tutte le derivate parziali di ordine p di F(t,x) sono funzioni continue di t ed x ed il problema (§) ha una sola soluzione *allora* per ogni tf > t0 il metodo *M* applicato a (§) è *convergente* per $E \to 0$ *di ordine* $\frac{p}{p+1}$ ed è ragionavole aspettarsi che:

N *tende ad infinito come* $1 \,/\, \sqrt[p+1]{E}$ e *per ogni k*: ET(k) *tende a zero come* $E^{\frac{p}{p+1}}$

(34.09) Esercizio (realizzazione in Scilab).

Modificare opportunamente la procedura TS_1_pv per ottenere una function di intestazione:

```
[T, X, PASSO] = TS_2_pv(x0, t0, tf, F, G2, G3, E, LAMBDA, HMIN)
```

che realizza il metodo TS(2) come descritto nella Definizione (34.02).
