Lezione 31 (ore 52,53) - 18 maggio 2016, 10:30 - 12:30 A24

(31.01) Teorema (convergenza del metodo di Eulero esplicito, 1).

Siano t0 un numero reale, F una funzione definita in R x R(n) a valori in R(n) e x0 in R(n).

Se:

(a) Tutte le derivate parziali prime di F(t,x) sono funzioni continue di t ed x, esiste un numero reale L tale che F(t,x) è L-lipschitziana rispetto ad x e la funzione F(t,0) è limitata su R;

(b) Esiste un numero reale C" tale che per la funzione:

$$G(t,x) = \partial_t F(t,x) + \partial_x F(t,x) \cdot F(t,x)$$

si ha, per ogni (t,x) in R x R(n): $\| G(t,x) \| \leqslant C''$

allora: per ogni tf > t0 e $\lambda > 0$, il metodo di Eulero esplicito applicato al Problema di Cauchy:

(§) $$x'(t) = F(t,x(t)) \quad , \quad x(t0) = x0$$

è *convergente per* E → 0.

(31.02) Osservazione (sulle condizioni (a) e (b)).

La condizione (a) è *sufficiente* per il sussistere delle Ipotesi (29.09) e (30.05).

Poiché per ogni soluzione y(t) dell'equazione differenziale x'(t) = F(t,x(t)) si ha: y"(t) = G(t,y(t)), la condizione (b) garantisce che:

$$\text{per ogni t in R:} \quad \| y''(t) \| \leqslant C''$$

(31.03) Dimostrazione (del Teorema (31.01)).

Sia tf > t0.

- Parte 1: Il metodo raggiunge tf.

  Dall'ipotesi (b), per ogni k si ha:

  $$d(k) = \max \{ \lambda , \| y''(t(k); x(k),t(k)) \| \} \leqslant \max \{ \lambda , C'' \} = M$$

  da cui:

  $$\sqrt{\frac{2E}{d(k)}} \geqslant \sqrt{\frac{2E}{M}} = hmin$$

Dunque, indicando con int(x) la *parte intera superiore* di x (ovvero il più piccolo numero intero non inferiore ad x), la procedura termina in *al più*:

$$\text{int}\left(\frac{tf - t0}{hmin} \right) = \text{int}\left((tf - t0) \sqrt{\frac{M}{2E}} \right) = Nmax$$

passi con tN = tf.

- Parte 2: Stima dell'errore totale.

All'istante t0 si ha:

$$et(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad ET(0) = 0$$

All'istante t1:

$$et(1) = el(1) \quad \Rightarrow \quad ET(1) = EL(1)$$

Per gli istanti successivi, utilizzando la relazione tra errore totale e locale mostrata nell'Osservazione (30.04), si ha:

$$et(k) = el(k) + \Delta y(t(k);\, et(k-1),\, t(k-1)) \quad \Rightarrow$$

$$ET(k) \leqslant EL(k) + \| \Delta y(t(k);\, et(k-1),\, t(k-1)) \|$$

La condizione (a) garantisce che per ogni t' < t" in R e s in R(n):

$$\| \Delta y(t";\, s,\, t') \| \leqslant e^{L\,(t" - t')} \| s \|$$

quindi si ottiene:

$$ET(k) \leqslant EL(k) + e^{L\,h(k-1)}\, ET(k-1)$$

All'istante t(2) si ha allora:

$$ET(2) \leqslant EL(2) + e^{L\,h(1)}\, ET(1) = EL(2) + e^{L\,h(1)}\, EL(1)$$

Analogamente, all'istante t(3):

$$ET(3) \leqslant EL(3) + e^{L\,h(2)}\, ET(2)$$

$$\leqslant EL(3) + e^{L\,h(2)}\, EL(2) + e^{L\,(h(2) + h(1))}\, EL(1)$$

Infine, all'istante t(k):

$$ET(k) \leqslant EL(k) + e^{L\,h(k-1)}\, EL(k-1) + \ldots + e^{L\,(h(k-1) + \ldots + h(1))}\, EL(1)$$

Dall'ipotesi (b) del Teorema, per j = 1,...,N si ottiene (utilizzando l'espressione di el(j) che si ottiene ragionando come nell'Osservazione (30.07) ma adottando la *forma integrale* del resto nella formula di Taylor):

$$EL(j) \leqslant \frac{1}{2} \; C'' \; h(j-1)^2$$

da cui, posto hmax = max { h(1),...,h(N-1) }:

$$EL(j) \leqslant \frac{1}{2} \; C'' \; hmax \; h(j-1)$$

Se ne deduce, per l'errore totale all'istante t(k):

$$ET(k) \leqslant \frac{1}{2} \; C'' \; hmax \; \Big(\; h(k-1) + h(k-2) \; e^{L \; h(k-1)} \; +\ldots$$

$$+ \; h(0) \; e^{L \; (h(k-1) \; +\ldots+ \; h(1))} \; \Big)$$

Con opportune maggiorazioni si ottiene:

$$h(k-1) \; +\ldots+ \; h(0) \; e^{L \; (h(k-1) \; +\ldots+ \; h(1))} \leqslant \frac{e^{L \; (t(k) \; - \; t0)} - 1}{L}$$

Infine:

$$ET(k) \leqslant \frac{1}{2} \; C'' \; hmax \; \frac{e^{L \; (t(k) \; - \; t0)} - 1}{L} \leqslant \frac{1}{2} \; C'' \; hmax \; \frac{e^{L \; (tf \; - \; t0)} - 1}{L}$$

e, utilizzando la disuguaglianza finale dell'Osservazione (30.07):

$$ET(k) \leqslant \frac{1}{2} \; C'' \; \sqrt{\frac{2E}{\lambda}} \; \frac{e^{L \; (tf \; - \; t0)} - 1}{L}$$