Lezione 30 (ore 50,51) - 17 maggio 2016, 9:30 - 11:30 C21

(30.01) Definizione (errore totale).

Siano t(k) un istante di integrazione e x(k) la corrispondente approssimazione generati da un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del problema (§). La colonna:

$$et(k) = x(k) - y(t(k);\ x0,t0) \text{ in } R(n)$$

si chiama *errore totale all'istante* t(k). La norma di et(k), che si indica con ET(k), è *una misura di quanto il metodo sbaglia, all'istante* t(k), *nel seguire la soluzione del problema* (§).

(30.02) Definizione (metodo convergente per E → 0).

Un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del problema (§) su [t0,tf] è *convergente per* E → 0 se: *per ogni* Δ > 0 esiste E* tale che *se* E < E* *allora* per gli istanti t(0) = t0,...,t(N) e le colonne x(0) = x0,...,x(N) determinati dal metodo si ha:

$$t(N) = tf \qquad \text{e} \qquad \max \{ ET(0), \dots ,ET(N) \} < \Delta$$

(30.03) Definizione (errore locale).

Siano t(k-1) e t(k) due istanti di integrazione consecutivi e x(k-1),x(k) le corrispondenti approssimazioni generati da un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del problema (§). La colonna:

$$el(k) = x(k) - y(t(k);\ x(k-1),t(k-1)) \text{ in } R(n)$$

si chiama *errore locale all'istante* t(k). La norma di el(k), che si indica con EL(k), è *una misura di quanto il metodo sbaglia, all'istante* t(k), *nel seguire la soluzione dell'equazione differenziale* x'(t) = F(t,x(t)) *che all'istante* t(k-1) *passa per* x(k-1).

(30.04) Osservazione (relazione tra errore locale e totale).

Si ha:

$$et(k) = x(k) - y(t(k);\ x0,t0) = (\ x(k) - y(t(k);\ x(k-1),t(k-1))\ ) +$$

$$+ (\ y(t(k);\ x(k-1),t(k-1)) - y(t(k);\ x0,t0)\ )$$

da cui:

$$et(k) = el(k) + [\ y(t(k);\ x(k-1),t(k-1)) - y(t(k);\ x0,t0)\ ]$$

La quantità tra parentesi quadre descrive come *l'equazione differenziale* tramanda, dall'istante t(k-1) all'istante t(k), lo scostamento:

$$x(k-1) - y(t(k-1);\ x0,t0) = et(k-1)$$

di x(k-1) dalla soluzione y(t; x0,t0) del problema (§). Introducendo la notazione:

$$\Delta y(t'';\ s,\ t') = y(t'';\ y(t';\ x0,t0) + s,\ t') - y(t'';\ y(t';\ x0,t0),\ t')$$

si riscrive, infine:

$$et(k) = el(k) + \Delta y(t(k);\ et(k-1),\ t(k-1))$$

---

* Metodo di Eulero esplicito *

(30.05) Ipotesi (regolarità delle soluzioni).

Supponiamo che *tutte* le soluzioni dell'equazione differenziale x'(t) = F(t,x(t)) abbiano *derivata seconda continua.*

La richiesta è certamente soddisfatta se *tutte* le derivate parziali prime della funzione F che definisce il problema (§) *esistono* e sono funzioni *continue* di t ed x.

(Infatti: se y(t) è soluzione dell'equazione differenziale si ha:

$$(y'(t))' = (\ F(\ t,y(t)\ ))' = \partial_t F(\ t,y(t)\ ) + \partial_x F(\ t,y(t)\ ) \cdot y'(t)$$

che risulta continua perché lo sono $\partial_t F$, $\partial_x F$, y(t) e y'(t).)

(30.06) Definizione (metodo di Eulero esplicito).

Il *metodo di Eulero esplicito* è definito dalle procedure seguenti.

- SCELTA di h(k). Dati E > 0 e λ > 0, per ogni k si pone:

  $$d(k) = \max \{\ \lambda\ ,\ \|\ y''(t(k);\ x(k),t(k))\ \|\ \}$$

  e poi:

  $$h(k) = \min \{\ \sqrt{\frac{2E}{d(k)}}\ ,\ tf - t(k)\ \}$$

- CALCOLO di x(k+1). Dopo aver scelto h(k) si pone:

  $$x(k+1) = x(k) + F(\ t(k),x(k)\ )\ h(k)$$

(30.07) Osservazione (sulla scelta di h(k)).

Indicando con y(t) la soluzione y(t; x(k),t(k)) dell'equazione differenziale, sia s la funzione da R in R(n) definita da:

$$s(h) = x(k) + F(\, t(k),x(k)\,)\, h - y(t(k) + h)$$

Detto G il grafico di y(t), il valore s(h) rappresenta lo *scostamento* tra G e la retta tangente a G in t(k), misurato all'istante t(k) + h. Per h > 0 la quantità s(h) è l'errore locale all'istante t(k) + h.

Poiché y(t) ha derivata seconda continua, utilizzando lo sviluppo di Taylor in t(k) si ha: esiste z(h) in R(n) tale che:

$$y(t(k) + h) = y(t(k)) + y'(t(k))\, h + \frac{1}{2}\, (y''(t(k)) + z(h))\, h^2 \quad \text{e} \quad z(h) \to 0 \text{ per } h \to 0$$

e quindi, essendo y(t(k)) = x(k) e y'(t(k)) = F(t(k),x(k)):

$$s(h) = -\frac{1}{2}\, (y''(t(k)) + z(h))\, h^2$$

Se y"(t(k)) non è zero *allora*:

- *per* h *piccolo*: $-\frac{1}{2}\, y''(t(k))\, h^2$ *è una buona stima di* s(h)
- si ha:

$$\left\| -\frac{1}{2}\, y''(t(k))\, h^2 \right\| = E \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{\frac{2E}{\| y''(t(k)) \|}}$$

In ogni caso, e per ogni $\lambda > 0$, si ha:

$$\left\| -\frac{1}{2}\, y''(t(k))\, h^2 \right\| \leqslant E$$

Il parametro λ ha lo scopo di evitare che possa essere d(k) = 0 e garantisce, inoltre, che:

$$\textit{per ogni } k\text{: } d(k) \geqslant \lambda \qquad \textit{e quindi} \qquad h(k) \leqslant \sqrt{\frac{2E}{\lambda}}$$