Lezione 29 (ore 48,49) - 16 maggio 2016, 10:30 - 12:30 A24

---

* MINIMI QUADRATI *

(29.01) Definizione (approssimazione nel senso dei minimi quadrati).

Siano (x(1),y(1)),...,(x(m),y(m)) coppie di numeri reali (dette *dati*) e g(1),...,g(n) funzioni continue da R in R. Posto:

$$G = \{ a(1)g(1) + \dots + a(n)g(n) \quad \text{con} \quad a(1),\dots,a(n) \text{ in } R \}$$

e detto:

$$SQ(g) = | g(x(1)) - y(1) |^2 + \dots + | g(x(m)) - y(m) |^2$$

lo *scarto quadratico* associato a g, ci poniamo il seguente problema:

> Determinare le funzioni in G che rendono *minimo* lo scarto quadratico, ovvero: determinare in G le *migliori approssimazioni dei dati nel senso dei minimi quadrati*.

(29.02) Osservazione (interpretazione geometrica).

Interpretando i dati come coordinate di punti in un piano cartesiano, lo scarto quadratico ha un semplice *significato geometrico*. Il valore SQ(g) è somma di m addendi. Il j-esimo addendo è il quadrato della lunghezza del segmento individuato, sulla retta verticale di ascissa x(j), dal valore g(x(j)) e dall'ordinata del j-esimo dato y(j). Il valore SQ(g) è *una misura dello scostamento del grafico di* g(x) *dai dati*.

(29.03) Esempio.

Si considerino i dati (-1,0), (0,1), (1,1) e le funzioni g(1) = 1, g(2) = x. In questo caso G = P(1;R), l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado al più uno.

L'insieme dei grafici degli elementi di G è l'insieme delle rette non verticali nel piano. Allora, con linguaggio geometrico: a ciascuno degli elementi di G che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati corrisponde una *retta* che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.

Per determinare gli elementi cercati scriviamo g(x) in G nella forma: g(x) = a(1) + a(2) x e riscriviamo di conseguenza lo scarto quadratico associato a g:

$$SQ(g) = | g(-1) - 0 |^2 + | g(0) - 1 |^2 + | g(1) - 1 |^2 =$$

$$= | a(1) - a(2) |^2 + | a(1) - 1 |^2 + | a(1) + a(2) - 1 |^2$$

Quest'ultima espressione si può interpretare come quadrato della norma euclidea di un'opportuna colonna di R(3):

$$SQ(g) = \left\| a(1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a(2) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2$$

Posto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

il problema è ricondotto a quello di determinare colonne in R(2) che rendono minimo il valore della funzione:

$$F(x) = \| A\ x - b \|^2$$

(29.04) Definizione (soluzione di un sistema nel senso dei minimi quadrati).

Siano A in R(m x n) e b in R(m). Il vettore x° in R(n) è *soluzione del sistema* A x = b *nel senso dei minimi quadrati* se:

$$\text{per ogni } x \text{ in } R(n): \quad \| A\ x° - b \|^2 \leqslant \| A\ x - b \|^2$$

ovvero se x° rende minimo il valore della funzione $F(x) = \| A\ x - b \|^2$.

(29.05) Osservazione (A\b).

Siano A e b come nella definizione precedente.

(a) Le soluzioni di A x = b nel senso dei minimi quadrati sono *le coordinate*, rispetto alle colonne di A, *della proiezione ortogonale di* b *sullo spazio generato dalle colonne di* A (considerare il caso A in R(3 x 1), b in R(3)).
(b) Se le colonne di A sono *linearmente indipendenti*, l'insieme delle soluzioni di A x = b nel senso dei minimi quadrati ha *un solo elemento*. Se le colonne di A sono *linearmente dipendenti*, l'insieme delle soluzioni di A x = b nel senso dei minimi quadrati ha *infiniti elementi*. In particolare, l'insieme delle soluzioni di A x = b nel senso dei minimi quadrati ha *sempre* almeno un elemento.
(c) In *Scilab*, A\b determina un'approssimazione di *una* delle soluzioni di A x = b nel senso dei minimi quadrati.

(29.06) Esempio (continua).

Poiché le colonne di A sono linearmente indipendenti, il sistema A x = b ha una sola soluzione nel senso dei minimi quadrati che possiamo approssimare, in *Scilab*, come segue:

```
-->A = [1,-1;1,0;1,1]
 A  =

    1.  - 1.
    1.    0.
    1.    1.

-->b = [0;1;1]
 b  =

    0.
    1.
    1.

-->a = A\b
 a  =

    0.6666667
    0.5
```

Si osservi che il sistema A x = b *non ha soluzioni*. Questo è geometricamente evidente: se y in R(2) è soluzione del sistema A x = b allora:

$$SQ(y(1) + y(2)\ x) = ||\ A\ y - b\ ||^2 = 0$$

ovvero la retta grafico di y(1) + y(2) x contiene i dati. I dati sono tre punti non allineati e quindi ...

---

* EQUAZIONI DIFFERENZIALI *

(29.07) Esempio.

I moti di un oscillatore armonico smorzato sono descritti dall'*equazione differenziale*:

(*) $$x''(t) + a\ x'(t) + b\ x(t) = 0$$

in cui l'incognita è la *funzione* a valori reali x(t). Questa è un'equazione differenziale del *secondo ordine* (lineare, a coefficienti costanti, omogenea). Una *soluzione* dell'equazione è una funzione y(t) a valori reali *con derivata seconda* che soddisfa l'uguaglianza y"(t) + a y'(t) + b y(t) = 0 per *ogni* t in R. L'equazione differenziale determina *tutti* i possibili moti dell'oscillatore (l'equazione (*) ha *infinite* soluzioni). Ciascuno dei moti è individuato dalle *condizioni iniziali*:

$$x(t0) = x0 \quad , \quad x'(t0) = v0$$

Si chiama *Problema di Cauchy* quello di *determinare le soluzioni dell'equazione* *differenziale che soddisfano le condizioni iniziali.*

L'equazione differenziale del secondo ordine (*) è *equivalente* ad un *sistema di* due *equazioni del primo ordine.* Se y(t) è soluzione dell'equazione (*) allora, posto:

$$x1(t) = y(t) \quad , \quad x2(t) = y'(t)$$

si ha:

$$(**) \qquad x1'(t) = x2(t) \quad , \quad x2'(t) = - a\, x2(t) - b\, x1(t)$$

dunque la colonna col(x1(t), x2(t)) è soluzione del sistema (**). Viceversa: se col(y1(t), y2(t)) è una soluzione del sistema (**), allora, posto y(t) = y1(t) si ha: y"(t) = y1"(t) = y2'(t) = - a y2(t) - b y1(t) ovvero:

$$y''(t) + a\, y'(t) + b\, y(t) = 0$$

cioè y(t) è soluzione dell'equazione (*).

(29.08) Osservazione.

Le procedure che descriveremo sono pensate per approssimare *la* soluzione del un Problema di Cauchy:

$$(\S) \qquad x'(t) = F(\, t,x(t)\,) \quad , \quad x(t0) = x0$$

per t in un intervallo *limitato* [t0,tf]. L'*incognita* del problema è la funzione x(t) a valori in R(n); i *dati* sono: *la funzione* F definita in R x R(n) a valori in R(n), *gli istanti* t0 *e* tf > t0 e *la colonna* x0 in R(n).

L'asserto precedente presuppone che per il problema (§) dovremo avere *esistenza ed unicità* della soluzione. Vedremo poi che anche per *descrivere le procedure* sarà necessario fare un'ipotesi ulteriore:

(29.09) Ipotesi (di esistenza ed unicità).

Per ogni $\underline{t}$ in R e $\underline{x}$ in R(n) esiste una sola soluzione dell'equazione differenziale:

$$x'(t) = F(\, t,x(t)\,)$$

che verifica la condizioni iniziali:

$$x(\underline{t}) = \underline{x}$$

Indicheremo tale soluzione con $y(t;\underline{x},\underline{t})$.

(29.10) Definizione (metodo numerico *a passo variabile* per l'approssimazione ...).

Un *metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del Problema di Cauchy* (§) su [t0,tf] è una procedura che costruisce, in base al valore di un parametro E controllato dall'utilizzatore, numeri reali t(0) = t0,...,t(N) in [t0,tf] e colonne x(0) = x0,...,x(N) in R(n) e, per k = 0,...,N, suggerisce di utilizzare x(k) come approssimazione di y(t(k);x0,t0).

I numeri t(0),...,t(N) si chiamano *istanti di integrazione* e, per k = 0,...,N-1, il numero h(k) = t(k+1) - t(k) si chiama *passo di integrazione all'istante* t(k).

Una realizzazione in *Scilab* di un metodo numerico ha la struttura seguente:

```
function [T,X] = MetodoNumerico(x0,t0,tf,F,E)

k = 0;
while t(k) < tf,
   SCEGLI h(k) in base al valore di E;
   CALCOLA x(k+1);
   t(k+1) = t(k) + h(k);
   k = k+1;
end;

endfunction
```

Le variabili di uscita sono, rispettivamente, la riga T e la matrice X tali che:

T = (t(0),...,t(N))   ,   X = (x(0),...,x(N))

Un metodo numerico è caratterizzato dalle procedure di *scelta* di h(k) e *calcolo* di x(k+1).
