

(27.01) Osservazione.

Sia A in $\mathbb{R}(n \times n)$. In *Scilab* si ha:

- $\text{tril}(A)$ = la matrice che si ottiene da A azzerando gli elementi sopra la diagonale principale. Esempio:

$$\text{tril}\left(\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 21 & 22 & 0 \\ 31 & 32 & 33 \end{bmatrix}$$

(27.02) Definizione (metodo di Gauss-Seidel).

Siano A in $\mathbb{R}(n \times n)$ invertibile con elementi diagonali tutti diversi da zero e b in $\mathbb{R}(n)$. Posto:

$$T = \text{tril}(A) \quad , \quad M = A - T$$

la matrice T risulta invertibile e:

$$A x = b \quad \text{è equivalente a} \quad x = -\text{inv}(T) M x + \text{inv}(T) b$$

Il metodo di Gauss-Seidel (applicato al sistema $A x = b$) è il metodo iterativo definito da:

$$H = -\text{inv}(T) M \quad \text{e} \quad c = \text{inv}(T) b$$

(27.03) Esempio.

Siano ($n = 4$):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & & & 1 \\ 1 & 3 & & 1 \\ 1 & & 3 & 1 \\ 1 & & & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \text{col}(1,1,1,1)$$

- La matrice A risulta a predominanza diagonale forte per righe e, quindi, invertibile e con elementi diagonali tutti diversi da zero. Il metodo di Gauss-Seidel è definito e si ha:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2/9 \\ 0 & 0 & 0 & -2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \quad , \quad c = \text{col}(1/3, 2/9, 2/9, 2/9)$$

- Gli autovalori di H ($0, 0, 0, 1/9$) hanno tutti modulo minore di uno. Per il Teorema di caratterizzazione (26.09) il metodo risulta convergente. Per ogni g in $\mathbb{R}(4)$ la

successione generata dal metodo risulta convergente alla soluzione x^* del sistema $A x = b$.

(27.04) Teorema (condizione sufficiente di convergenza per il metodo di Gauss-Seidel).

Siano A in $R(n \times n)$ e b in $R(n)$. Il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A x = b$ è certamente convergente nei due casi seguenti:

- (a) A è a predominanza diagonale forte per righe oppure per colonne
- (b) A è simmetrica e definita positiva.

(Dim: omessa.)

(27.05) Osservazione (costo).

Siano A in $R(n \times n)$, b in $R(n)$ e x' , x'' le approssimazioni della soluzione x^* del sistema $A x = b$ ottenute, rispettivamente, con un metodo diretto e con un metodo iterativo (dotato di un opportuno criterio d'arresto). Vogliamo confrontare x' ed x'' dal punto di vista del costo.

Supponiamo x' calcolata con il procedimento che utilizza EGPP. Il costo asintotico del calcolo è allora: $(2/3) n^3$.

Il costo del calcolo di x'' è:

$$(\text{costo per iterazione}) * (\text{numero di iterazioni})$$

Dobbiamo quindi determinare il costo di una singola iterazione.

Consideriamo, ad esempio, il metodo di Gauss-Seidel. Per calcolare la colonna $x^{(k+1)}$ si hanno (almeno) due alternative:

- (1) calcolare $-\text{inv}(P) M x^{(k)} + \text{inv}(P) b$;
- (2) calcolare la soluzione del sistema $P x = -M x^{(k)} + b$.

Per il costo della prima alternativa si ha:

- (a) $2 n^2 - 3 n$ operazioni per calcolare $-\text{inv}(P) M x^{(k)}$
- (b) n operazioni per calcolare la somma $-\text{inv}(P) M x^{(k)} + \text{inv}(P) b$

in totale: $2 n^2 - 2 n$ operazioni.

Per il costo della seconda alternativa si ha:

- (a) $n^2 - 2 n + 1$ operazioni per calcolare $-M x^{(k)}$
- (b) n operazioni per calcolare la somma $-M x^{(k)} + b$
- (c) n^2 operazioni per calcolare la soluzione del sistema

in totale: $2 n^2 - n + 1$ operazioni.

In entrambi i casi il costo asintotico è $2n^2$. Dunque: se x^n è stata calcolata con k iterazioni dal metodo di Gauss-Seidel, il costo asintotico del calcolo è $2kn^2$. Il metodo di Gauss-Seidel risulta più economico del metodo diretto che usa EGPP se $k < n/3$.

(27.06) Esempio.

Sia $H = \text{diag}(s(1), s(2))$ con $|s(2)| < |s(1)| < 1$. Per il Teorema di caratterizzazione dei metodi convergenti (26.09), il metodo iterativo definito da H e zero è convergente. Per ogni g in $R(2)$ la successione $\{x(k)\}$ generata converge a zero. Quanto rapidamente?

Sia $g = \text{col}(g(1), g(2))$ non zero. Allora:

$$x(k) = H^k g = \text{diag}(s(1)^k, s(2)^k) g = \text{col}(s(1)^k g(1), s(2)^k g(2))$$

e, utilizzando la norma uno:

$$\|x(k)\| = |s(1)^k g(1)| + |s(2)^k g(2)|$$

- Se $g(1)$ non è zero:

$$\|x(k)\| = |s(1)|^k |g(1)| (1 + |s(2)/s(1)|^k |g(2)/g(1)|)$$

da cui:

$$\|x(k)\| / |s(1)|^k \text{ tende a } |g(1)|, \text{ diverso da zero}$$

e $\|x(k)\|$ tende a zero con la stessa rapidità di $|s(1)|^k$.

- Se $g(1) = 0$, invece:

$$\|x(k)\| / |s(2)|^k \text{ tende a } |g(2)|, \text{ diverso da zero}$$

e $\|x(k)\|$ tende a zero con la stessa rapidità di $|s(2)|^k$ e quindi, essendo $|s(2)| < |s(1)|$, più rapidamente di $|s(1)|^k$.

(27.07) Teorema (sulla rapidità di convergenza).

Quanto accade nell'Esempio (27.06) si ritrova in generale.

Si consideri il metodo iterativo convergente definito da H in $R(n \times n)$ e c in $R(n)$. Detta x^* la soluzione del sistema $(I - H)x = c$, posto

$$r(H) = \max\{|s(j)|, s(j) \text{ autovalore di } H\}$$

e detta $\{x(k)\}$ la successione generata dal metodo a partire da g in $R(n)$, allora:

$$\|x(k) - x^*\| \text{ converge a zero almeno con la stessa rapidità di } r(H)^k$$

Inoltre, se il vettore iniziale g è scelto in modo aleatorio, la probabilità che la successione converga a zero più rapidamente di $r(H)^k$ è nulla.

(27.08) Esercizio.

Constatare che l'Esempio (27.06) verifica il teorema precedente.

(27.09) Esempio.

Si considerino la matrice A e la colonna b degli Esempi (26.11) e (27.03).

- Gli autovalori della matrice H che definisce il metodo di Jacobi applicato al sistema $Ax = b$ (Esempio (26.11)) sono: $\{0, 0, 1/3, -1/3\}$. Scegliendo g in modo aleatorio in \mathbb{R}^2 si otterrà certamente una successione $x(k) - x^*$ che tende a zero come $(1/3)^k$.
- Gli autovalori della matrice H che definisce il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $Ax = b$ (Esempio (27.03)) sono: $\{0, 0, 0, 1/9\}$. Scegliendo g in modo aleatorio in \mathbb{R}^2 si otterrà certamente una successione $x(k) - x^*$ che tende a zero come $(1/9)^k$.

In questo caso, scegliendo g in modo aleatorio in \mathbb{R}^2 , il metodo di Gauss-Seidel genera una successione che converge più rapidamente di quella generata dal metodo di Jacobi.
