Lezione 26 - 4 maggio 2016, 17:00 - 18:30 B23

* METODI ITERATIVI PER SISTEMI LINEARI *

(26.01) Definizione (di metodo iterativo).

Siano H in R(n x n) e c in R(n). Il metodo iterativo definito da H e c è la funzione che a ciascun g in R(n) associa la successione { x(k) } definita da:

$$x(0) = g \quad , \quad x(k) = H\, x(k-1) + c \quad (k = 1,2,\dots)$$

(26.02) Osservazione.

- Il metodo iterativo definito da H e c è il metodo ad un punto definito dalla funzione h(x) = H x + c. Poiché la funzione h risulta continua, se la successione generata dal metodo a partire da g è convergente, il suo limite v è un punto unito di h, ovvero v = H v + c, e quindi è soluzione del sistema:

$$(I - H)\, x = c$$

- Sia A in R(n x n) invertibile. Il metodo iterativo definito da H e c è utilizzabile per approssimare la soluzione del sistema A x = b se:

  (1) i sistemi A x = b e (I - H) x = c sono equivalenti (in particolare I - H è invertibile) e
  (2) è (praticamente) possibile determinare g in R(n) a partire dal quale la successione generata dal metodo è convergente.

(26.03) Esempio.

Siano (n = 2):

$$A = \mathrm{diag}(1/2, -1) \;,\; b = 0 \;,\; g = \mathrm{col}(g(1), g(2))$$

- Posto:

$$H = I - A = \mathrm{diag}(1/2, 2) \;,\; c = b$$

  i sistemi A x = b e (I - H) x = c sono equivalenti.

- La successione generata dal metodo iterativo a partire da g è:

$$x(0) = g \;,\; x(1) = H\, x(0) + c = H\, g \;,\; x(2) = H\, x(1) + c = H^2\, g \;, \dots$$

$$\ldots\ ,\ x(k) = H^k\ g = \mathrm{diag}(\ (1/2)^k\ ,\ 2^k\ )\ g = \mathrm{col}((1/2)^k\ g(1),\ 2^k\ g(2))$$

- La successione { x(k) } è convergente se e solo se g(2) = 0 e, in tal caso, il limite della successione è 0, la soluzione del sistema A x = b.

(26.04) Esempio.

Siano (n = 2):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\quad ,\quad b = 0\quad ,\quad g = \mathrm{col}(g(1),\ g(2))$$

- Posto:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\qquad e\qquad A = 2\ I + J$$

  si ha:

  A x = b   è equivalente a   x = - (1/2) J x + (1/2) b

- Posto:

  H = - (1/2) J   e   c = (1/2) b

  i sistemi A x = b e (I - H) x = c sono equivalenti.

- La matrice H è diagonalizzabile:

$$H = S\ \mathrm{diag}(-1/2,\ 1/2)\ \mathrm{inv}(S)\quad \mathrm{con}\quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- La successione generata dal metodo iterativo a partire da g è:

$$x(k) = H^k\ g = S\ \mathrm{diag}(\ (-1/2)^k\ ,\ (1/2)^k\ )\ \mathrm{inv}(S)\ g\quad ,\quad k = 0,1,\ldots$$

- La successione { x(k) } è convergente per ogni g in R(2) e, in tal caso, il limite della successione è 0, la soluzione del sistema A x = b.

(26.05) Esercizio.

Siano: A = - I e b = 0. Posto: H = I - A e c = b, mostrare che:

- La successione { x(k) } è convergente se e solo se g = 0 e, in tal caso, il limite della successione è 0, la soluzione del sistema A x = b.

(26.06) Osservazione.

La casistica ottenuta in (26.03), (26.04) e (26.05) si ritrova in generale. Sia H in R(n x n) tale che I - H risulta invertibile. Allora, per l'insieme dei valori di g in R(n) a partire dai quali la successione generata dal metodo definito da H e c è convergente, una sola delle seguenti possibilità sussiste:

(a) ha un solo elemento (la soluzione del sistema (I - H) x = c);
(b) è un sottospazio vettoriale di R(n) di dimensione minore di n (determinato dagli autovettori di H);
(c) è R(n).

Nei casi (a) e (b) è praticamente impossibile determinare un valore di g a partire dal quale la successione generata dal metodo è convergente (dunque il metodo non è utilizzabile ...). Nel caso (c) qualunque valore di g "va bene".

(26.07) Definizione (di metodo convergente).

Il metodo iterativo definito ha H in R(n x n) e c in R(n) è convergente se:

(a) per ogni g in R(n) la successione { x(k) } generata dal metodo a partire da g è convergente;
(b) il limite della successione { x(k) } è indipendente da g.

(26.08) Osservazione.

(1) Se I - H è invertibile (caso usuale quando il metodo è utilizzato per approssimare la soluzione di un sistema A x = b con A invertibile) allora (a) implica (b).
(2) Si confronti con il caso dei metodi iterativi per funzioni non lineari: in quel caso la situazione "buona" usuale è quella di convergenza locale.

(26.09) Teorema (caratterizzazione dei metodi convergenti).

Il metodo iterativo definito da H in R(n x n) e c in R(n) è convergente se e solo se tutti gli autovalori di H hanno modulo minore di uno.

(Dim: omessa.)

(26.10) Definizione (metodo di Jacobi).

Sia A in R(n x n) invertibile con elementi diagonali tutti diversi da zero. Posto:

D = diag(A(1,1),...,A(n,n))   ,   M = A - D

la matrice D risulta invertibile e: A x = b è equivalente a x = - inv(D) M x + inv(D) b.
Il metodo di Jacobi (applicato al sistema A x = b) è il metodo iterativo definito da:

H = - inv(D) M   e   c = inv(D) b

(26.11) Esempio.

Siano (n = 4):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & & & 1 \\ 1 & 3 & & 1 \\ 1 & & 3 & 1 \\ 1 & & & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \mathrm{col}(1,1,1,1)$$

- La matrice A risulta a predominanza diagonale forte per righe e, quindi, invertibile e con elementi diagonali tutti diversi da zero. Il metodo di Jacobi è definito e si ha:

$$H = -\,(1/3) \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ 1 & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad c = (1/3)\ \mathrm{col}(1,1,1,1)$$

- Gli autovalori di H (Λ(1) = Λ(2) = 0, Λ(3) = 1/3, Λ(4) = -1/3) hanno tutti modulo minore di uno. Per il Teorema di caratterizzazione (26.09) il metodo risulta convergente. Per ogni g in R(4) la successione generata dal metodo a partire da g risulta convergente alla soluzione x* del sistema A x = b.

(26.12) Teorema (condizione sufficiente di convergenza per il metodo di Jacobi).

Siano A in R(n x n) a predominanza diagonale forte per righe e b in R(n). Allora il metodo di Jacobi applicato al sistema A x = b è convergente.

(Dim: omessa.)
