<u>Es</u>: stessa struttura ed ep dell' <u>Es</u> precedente.

- $\hat{z} \in \mathbb{R}^2$ soluzione approssimata, calcolata ad es con una procedura che realizza uno dei procedim visti (usando fatt LR o QR);

- <u>def</u> (residuo): $\underbrace{r = A\hat{z} - b}$ (RESIDUO)

  $\neq 0$ a meno che $\hat{z}$ <u>soluzione esatta</u>!

- $\boxed{\hat{z} \text{ è SOLUZIONE ESATTA del SISTEMA PERTURBATO } Az = b + r}$

- <u>se</u>, posto $\frac{\|r\|}{\|b\|} = \alpha$, si ha $\alpha\, c(A) < \frac{1}{10}$ <u>allora</u>

  Teo condiz $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\|\hat{z} - z_*\|}{\|z_*\|} \le 2\alpha\, c(A)}$

<u>Pb</u>: $\exists$ δg, δc_k, δm_k, δh t.c. $E = 0$, $f = r$?

<u>Oss</u>: il risultato precedente è <u>COMUNQUE VALIDO</u>: il sist perturbato NON deve necessariamente essere significativo!!

<u>Sol</u>: Sì, ad es quelle determ da: $\delta c_k = 0$, $\delta g = 0$, $\delta h = 0$ e $\delta m_1 \cdot g = r_1$; $\delta m_2 \cdot g = r_2$.

- Sia $N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matrice t.c. $N\hat{z} = -r$

Allora: $\boxed{\hat{z} \text{ è SOLUZIONE ESATTA del sist PERTURB: } (A+N)z = b}$

Oss: se $\hat{z}=0$ e $r \neq 0$ nessuna matrice verifica;

se $\hat{z} \neq 0$ allora: $N = -\dfrac{r\hat{z}^T}{\hat{z}^T\hat{z}}$ è UNA matrice che verifica...

- se, posto $\dfrac{\|N\|}{\|A\|} = \alpha$, si ha $\alpha\, c(A) < \dfrac{1}{10}$ allora

Teo condiz $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\|\hat{z} - z_*\|}{\|z_*\|} \leq 2\alpha\, c(A)}$

Pb: $\exists$ δg, δc_k, δm_k, δh t.c. $E = N$, $f = 0$?

Es: $\hat{z} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 3,4 \end{pmatrix}$, $N = \mathrm{diag}(n_{11}, n_{22})$

- $r = A\hat{z} - b = \begin{bmatrix} 20 - 9,81 \\ -9,81 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 10,19 \\ -9,81 \end{pmatrix}$

- $N\hat{z} = -r \Leftrightarrow \begin{cases} 1,8\, n_{11} = -10,19 \\ 3,4\, n_{22} = 9,81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_{11} = -5,66\ldots \\ n_{22} = 2,88\ldots \end{cases}$

- $\hat{z}$ è soluz esatta di $(A+N)z = b$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\|N\|_1}{\|A\|_1} = \frac{5,66\ldots}{300} \simeq 1,88 \; 10^{-2}$$

$$e \qquad \alpha \, c_1(A) \simeq 0,56 \; 10^{-1} < 1/10$$

- Teo condiz $\Rightarrow$ $\dfrac{\|\hat{z} - z^*\|_1}{\|z^*\|_1} \leq 2 \alpha \, c_1(A) \simeq 0,11$

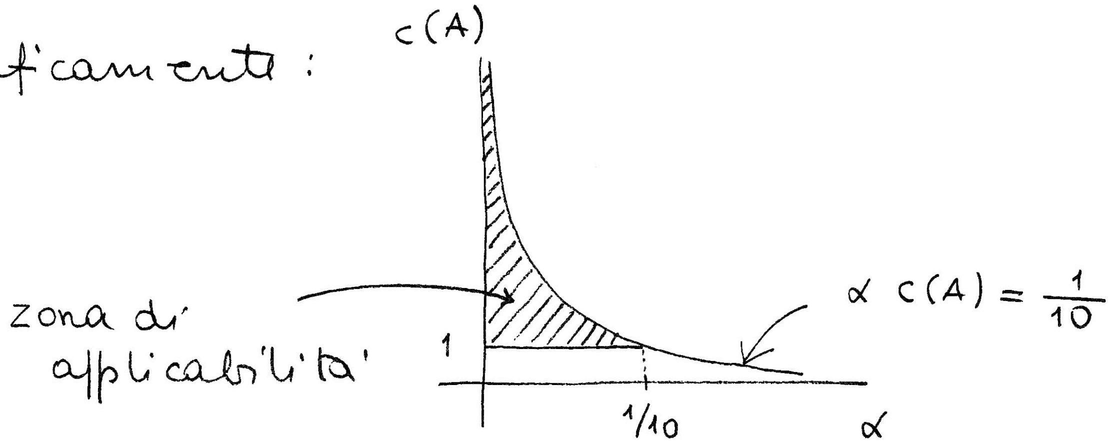
  $\simeq 1,3 \cdot 10^{-2}$

- $\boxed{\begin{array}{ll} \delta c_1 = -5,66\ldots \; N/m & , \; \delta c_2 = 0 \\ \delta c_3 = 2,88\ldots \; N/m & \end{array}}$ $\leftarrow$ per avere $E = N$

  $\boxed{\begin{array}{l} \delta m_1 = 0 \;, \; \delta g = 0 \\ \delta m_2 \text{ t.c. } \delta m_2 \cdot g + \delta c_3 \cdot h = 0 \end{array}}$ $\leftarrow$ per avere $f = 0$

<u>Oss</u>: Per utilizz il Teo condiz occorre che $\alpha \; c(A) < \dfrac{1}{10}$.

Graficamente:



... più è GRANDE $c(A)$, più PICCOLO deve essere α ...

- $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $c(A) \geq 1$

<u>dim</u>: $\forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

se $B = A^{-1}$:

$$\|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

$$\|I\| = \max \{ \underbrace{\|Iv\|}_{=\|v\|=1}, \|v\| = 1 \} = 1$$