Oss: (1) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\exists$ U, T fatt QR di A.

(2) Esistono procedure che, assegnata una matrice, ne calcolano una fatt QR; la funzione predefinita qr di Scilab realizza una di tali procedure.

(3) Sia P una procedura che, assegnata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, restituisca una coppia U, T fatt QR di A. Se si utilizza P per cercare la soluzione del sistema $Ax=b$ occorre verificare l'invertibilità del fattore destro:

$[U,T] = P(A)$

$c = U^T b$

<u>se</u> $\det T = 0$ <u>allora</u> STOP

$x^* = SI(T, c)$

Il procedimento risulta SODDISFACENTE.

* CONDIZIONAMENTO *

... del Pb della soluz di un sist di eq lineari.

- A invertibile, $b \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\exists!\, x_*$ t.c. $A x_* = b$
  $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ (soluzione)

- $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ perturbazione (additiva) di A

  $f \in \mathbb{R}^n$ " " di b

- ip: $A+E$ invertibile ...

  $\Rightarrow \exists!\, \hat{x}$ t.c. $(A+E)\hat{x} = b+f$; $\hat{x} = x_* + \boxed{\delta x}$

  variazione della soluz

- dati soluzione

PERTURBAZIONE dei dati $\Rightarrow$ VARIAZIONE della soluz

Pb: assegnato un modo di misurare le perturbaz dei dati e la variaz della soluz, determ quanto grande può essere la variaz della soluz in funzione di quanto grandi sono le perturbaz dei dati.

Es: $E = 0$; $f \neq 0$

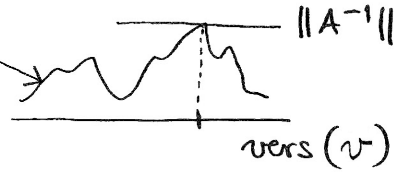
- x_* t.c $Ax_* = b$
- $\hat{x}$ t.c $A\hat{x} = b + f$; $\hat{x} = x_* + \delta x$

- $Ax_* - A\hat{x} = A(\hat{x} - x_*) = A\delta x = (b+f) - b = f \Rightarrow \boxed{\delta x = A^{-1} f}$

- $\|\delta x\| = \|A^{-1} f\|$ "errore assoluto"

$f = \frac{f}{\|f\|}\|f\|$ $\frac{f}{\|f\|}$ = vers(f): vettore di norma uno che specifica la <u>direzione</u> di f

$$\Rightarrow \|\delta x\| = \|A^{-1}(\|f\| \operatorname{vers}(f))\|$$
$$= \|A^{-1}\operatorname{vers}(f)\| \, \|f\|$$



posto $\|A^{-1}\| \equiv \max_{v \neq 0} \|A^{-1}\operatorname{vers}(v)\|$

$$\left[= \max\{\|A^{-1}v\|, \|v\| = 1\}\right]$$

si ha: $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \, \|f\|$

$\boxed{\exists f \text{ t.c. } =}$

- $b \neq 0$ $(\Rightarrow x_* \neq 0)$: $\frac{\|\delta x\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{\|f\|}{\|x_*\|}$

"errore relativo"

$\max_{v \neq 0} \|A \operatorname{vers}(v)\|$

<u>MA</u>: $Ax_* = b \Rightarrow \|b\| = \|Ax_*\| \leq \|A\| \, \|x_*\|$

$\boxed{\exists x_* \text{ (ovvero } b) \text{ t.c. } =}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x_*\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

(err relativo su b)

quindi: $\frac{\|\delta x\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\| \, \|A\| \frac{\|f\|}{\|b\|}$

<u>def</u> (numero di condizionamento)

sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile :

$c(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$ ⟵ NUMERO di CONDIZIONAMENTO <u>di A</u>

(dip dalla norma !)

- $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x_*\|} \equiv \varepsilon_x \; , \quad \dfrac{\|f\|}{\|b\|} \equiv \varepsilon_b$

si riscrive :

(1) $\varepsilon_x \leq c(A)\,\varepsilon_b$

(2) $\exists\, b, f : \quad \varepsilon_x = c(A)\,\varepsilon_b$

<u>TEO</u> (di condizionamento)

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile
  $b \in \mathbb{R}^n$ non zero
  x^* la soluz (non zero!) di $Ax = b$
- $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f \in \mathbb{R}^n$ perturbaz dei dati t.c

$$\epsilon_A = \frac{\|E\|}{\|A\|} \leqslant \alpha \quad e \quad \epsilon_b = \frac{\|f\|}{\|b\|} \leqslant \alpha$$

con $c(A)\,\alpha \leqslant 1/10$ ($\Rightarrow A+E$ invertibile !)

<u>Allora</u> : detta $\hat{x}$ la soluz del sistema perturbato $(A+E)x = b+f$ e posto $\delta x = \hat{x} - x^*$ si ha

(1) $\varepsilon_x = \dfrac{\|\delta x\|}{\|x^*\|} \leqslant 2 \cdot c(A)\,\alpha$

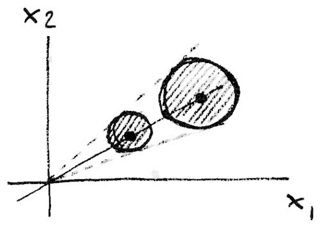
(2) $\exists\, b, E, f : \quad \varepsilon_x = 2 \cdot c(A)\,\alpha$

Es: In $\mathbb{R}^2$ sia v un vett di norma 2.

(A) Posto $x_* = v$, disegnare l'ins degli $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\varepsilon_x \leq 1/4$.

(B) Posto $x_* = \frac{1}{2} v$, ...

[Sol:



]

Es: In $\mathbb{R}^2$ sia v un vett di norma 2.

(A) Posto $x_* = v$, disegnare l'ins degli $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\|\hat{x} - x_*\| \leq 1/4$.

(B) Posto $x_* = \frac{1}{2} v$, ...

Es: In $\mathbb{R}^2$ sia $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon_x \leq L$

Calcolare il valore massimo dei rapporti:

$$\frac{|\delta x_1|}{|x_1^*|}, \quad \frac{|\delta x_2|}{|x_2^*|}$$

Sol: • $\varepsilon_x \leq L \Rightarrow \|\delta x\| \leq L \|x^*\|$ e $\max \|\delta x\| = L \|x^*\|$;

• $$\max \frac{|\delta x_1|}{|x_1^*|} = \frac{\max |\delta x_1|}{|x_1^*|} = \frac{\max \|\delta x\|}{|x_1^*|} = L \frac{\|x^*\|}{|x_1^*|} = L \frac{\sqrt{4+0,01}}{2}$$

$$\simeq L;$$

• $$\max \frac{|\delta x_2|}{|x_2^*|} = L \frac{\sqrt{4+0,01}}{0,1} \simeq 20 L.$$

Oss: $v \in \mathbb{R}^n$; $$\frac{\|v\|}{|v_k|} = \frac{\sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}}{|v_k|} = \sqrt{1 + \sum_{j \neq k} \frac{v_j^2}{v_k^2}}$$

≥ 0 (MOLTO > 0 se...)

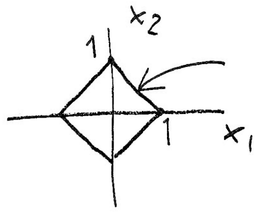
<u>def</u> (norma uno in $\mathbb{R}^n$)

La funzione $N_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ def da

$$N_1(x) = |x_1| + \dots + |x_n|$$

è una norma in $\mathbb{R}^n$ (notaz usuale: $\|x\|_1$).

<u>Oss</u>: In $\mathbb{R}^2$...



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 = 1\}$

<u>Teo</u> (norma uno in $\mathbb{R}^{n \times n}$)

Sia $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si ha:

$$\|A\|_1 \equiv \max_{v \neq 0} \| A \operatorname{vers}(v) \|_1 =$$

$$= \max \{ \|a_1\|_1, \dots, \|a_n\|_1 \}$$

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$; $\|A\|_1 = \max\{3, 13, 3\} = 13$.