* FATTORIZZAZIONE QR *

def: U, T fatt QR di $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ significa

1) $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonale (colonne base o.n di $\mathbb{R}^n$)
2) $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tr superiore
3) $UT = A$

- int geometrica:

Sia U, T una fatt QR di $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

u_1, u_2, u_3 (colonne di U) sono base o.n di $\mathbb{R}^3$ t.c.

$$(a_1, a_2, a_3) = (u_1, u_2, u_3) \boxed{\begin{matrix} t_{11} & t_{12} & t_1 \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{matrix}}$$

u_1, a_1 "sono sulla stessa retta",

$\Rightarrow$ u_1, u_2 e a_1, a_2 "sono sullo stesso piano",

u_1, u_2, u_3 e a_1, a_2, a_3 ...

- determinazione di una fatt QR:

Es: $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Passo 1: si cercano $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ a colonne ortogonali (non necess di norma uno!) e θ tr sup con $\theta_{kk} = 1$ t.c. $A = \Omega\theta$.

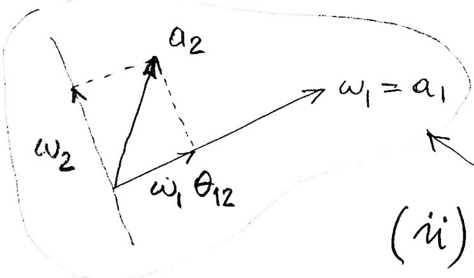
$$(a_1, a_2, a_3) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{cases} a_1 = w_1 \\ a_2 = w_1 \theta_{12} + w_2 \\ a_3 = w_1 \theta_{13} + w_2 \theta_{23} + w_3 \end{cases}$$

Eq. 1 $\Rightarrow$ $\boxed{w_1 = a_1}$

Eq. 2 $\Rightarrow$ (i.1) $a_2 \cdot w_1 = (w_1 \theta_{12} + w_2) \cdot w_1 = \quad (w_2 \cdot w_1 = 0!)$

$$= \theta_{12} (w_1 \cdot w_1)$$



<u>SE</u> $w_1 \neq 0$ <u>ALLORA</u> $\boxed{\theta_{12} = \dfrac{a_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}}$

<u>ALTRIMENTI</u> STOP

(ii) $\boxed{w_2 = a_2 - w_1 \theta_{12}}$

Eq. 3 $\Rightarrow$ (i.1) $a_3 \cdot w_1 = (w_1 \theta_{13} + w_2 \theta_{23} + w_3) \cdot w_1 =$

$$= \theta_{13} (w_1 \cdot w_1) \Rightarrow \boxed{\theta_{13} = \frac{a_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}}$$

(i.2) $a_3 \cdot w_2 = (w_1 \theta_{13} + w_2 \theta_{23} + w_3) \cdot w_2 =$

$$= \theta_{23} (w_2 \cdot w_2)$$

<u>SE</u> $w_2 \neq 0$ <u>ALLORA</u> $\boxed{\theta_{23} = \dfrac{a_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2}}$

<u>ALTRIMENTI</u> STOP

(ii) $\boxed{w_3 = a_3 - w_1 \theta_{13} - w_2 \theta_{23}}$

<u>Oss</u>: <u>Passo 1</u> termina regolarmente $\Leftrightarrow$ $a_1, \ldots, a_{m-1}$ lin indip.

dim: PASSO 1 termina regolarmente

$\Rightarrow \quad A = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)\ \theta$ ← tr sup invert

lin indip (perché ortogonali e $\neq 0$)

a_1, a_2 lin dip $\Rightarrow \exists\ x_1, x_2$ t.c. posto

$$x = (x_1, x_2, 0)^T$$

si ha $x \neq 0$ e $Ax = 0 \Rightarrow \Omega\theta x = 0$

ovvero $\Omega y = 0$ con

$$y = (x_1 + \theta_{12} x_2,\ x_2,\ 0)^T \neq 0$$

$\Rightarrow \omega_1, \omega_2$ lin dip : assurdo.

---

a_1, a_2 lin indip $\Rightarrow \omega_1 = a_1 \neq 0$ e

$\omega_2 = a_2 - a_1\theta_{12} \neq 0$. Dunque PASSO 1

termina regolarmente.

<u>Passo 2</u>: se possibile, si normalizzano le colonne di Ω e se ne ricava una ~~fatt~~ QR.

(i) $\Delta = \text{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|, \|\omega_3\|)$

$\neq 0$

$\neq 0$?

(ii) <u>SE</u> $\omega_3 \neq 0$ <u>ALLORA</u>:

$$\Omega\theta = \underbrace{(\Omega\Delta^{-1})}_{U}\underbrace{(\Delta\theta)}_{T}$$

U, T è fatt QR!

<u>ALTRIMENTI</u> STOP.

> <u>Oss</u>: <u>Passo 1</u> e <u>Passo 2</u> terminano regolarmente $\Leftrightarrow$ A non singolare. Se terminano regolarmente, U, T è fatt QR di A.

• <u>uso della fatt QR per risolvere $Ax = b$</u>

$[U, T] = GS(A)$

funzione che realizza i due passi descritti

<u>se</u> GS ha fallito <u>allora</u> STOP; $\boxed{\Rightarrow \det A = 0}$

$c = U^T b$;

$x = SI(T, c)$;

<u>PROCEDIMENTO SODDISFACENTE</u>!