Pb: la procedura EG si arresta prematuramente se $A(k,k) = a_{kk}^{(k)} = 0$ per un $k \in \{1,\dots,n-1\}$

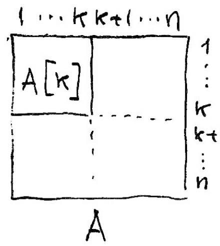
Es: $A = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{matrix}} \Rightarrow a_{22}^{(2)} = 0 \Rightarrow$ EG si arresta per $k = 2$.

TEO (terminazione regolare di EG)

La procedura EG determina una fattorizz LR della matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k)} \neq 0$ per $k = 1,\dots,n-1$

$\Leftrightarrow \quad \det A[k] \neq 0$ per $k = 1,\dots,\underline{\underline{n-1}}$



---

dim (cenno): $A^{(2)}[2] = H_1[2]\,A[2] \Rightarrow \det A[2] = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)}$;

in generale $\det A[k] = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)}$ etc.

- **Uso di EG, SA, SI per risolvere $Ax = b$**

$[S, D] = EG(A)$;

se $\boxed{\text{EG ha fallito}}$ allora STOP $\qquad \not\Rightarrow \det A = 0$: ??

$c = SA(S, b)$;

se $\boxed{\det D = 0}$ allora STOP $\qquad \Rightarrow \det A = 0$: ok!

$x = SI(D, c)$;

PROCEDIMENTO
NON SODDISFACENTE !

Classi di matrici per le quali EG termina regolarm

(SDP) Simmetriche Definite Positive

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SDP <u>significa</u>:

1) $A^T = A$ (simmetrica)
2) $\forall x \begin{cases} \in \mathbb{R}^n \\ \neq 0 \end{cases}$, $\underbrace{F(x)}_{: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} = x^T A x > 0$

$$\boxed{\text{\underline{Oss}: } A \text{ è SDP} \iff \det A[k] > 0 \text{ per } k = 1, \dots, n}$$

(PDF) a Predominanza Diagonale Forte

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a PDF <u>significa</u>:

$\underbrace{\forall k = 1, \dots, n}_{\text{per ogni RIGA...}} : \quad |a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ (PDF per righe...)

<u>Oss</u>: A è PDF $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$

e $A[k]$ è PDF, $k = 1, \dots, n$

* Procedura EGP *

Es: $D = H_3 P_3 H_2 P_2 H_1 P_1 A \Rightarrow A = \underbrace{P_1^T H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T H_3^{-1}}_{\text{NON è tr inf ...}} D$

... MA: $\underbrace{\overbrace{(P_3 P_2 P_1)}^{P} (P_1^T H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T H_3^{-1})}_{S}$ lo è!

$\Rightarrow PA = SD$; $[S, D, P] = EGP(A)$

$[S, D] = EG(PA)$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&2&2&0\\1&2&3&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&2&0\\0&1&3&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&1&3&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{H_3} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix} = D$;

$P = P_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix}$

$S = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1 \end{bmatrix}$

- calcolare SD e PA, calcolare $H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} H_3^{-1}$ e la stessa per P a sinistra.

TEO (terminazione regolare EGP)
la procedura EGP determina una matrice di permutazione P ed una fatt LR di $PA \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Leftrightarrow$ le prime $n-1$ colonne di A sono linearmente indipendenti.

- Uso di EGP, SA, SI per risolvere $Ax = b$

$[S, D, P] = EGP(A);$ $\boxed{\Rightarrow \det A = 0}$

<u>se</u> $\boxed{\text{EGP ha fallito}}$ <u>allora</u> STOP ;

$c = SA(S, Pb);$

<u>se</u> $\boxed{\det D = 0}$ <u>allora</u> STOP ;

$x = SI(D, c)$

PROCEDIMENTO SODDISFACENTE !

$$\left(Ax = b \rightarrow PAx = Pb \rightarrow SDx = Pb \ldots \right)$$