- <u>Caso generale</u>

<u>idea</u> : fattorizzare A con (scrivere A come prodotto di) fattori semplici...

<u>Es</u> : ① fattorizzazione LR (o LU) :

$S, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- S tr inf con $s_{kk} = 1$ ($\Rightarrow$ invertibile)
- D tr sup
- $SD = A$ $\boxed{A \text{ invert} \Leftrightarrow D \text{ invert}}$

② fattorizzazione QR :

$U, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- U ortogonale ($\Rightarrow$ invertibile)
- T tr sup
- $UT = A$ $\boxed{A \text{ invert} \Leftrightarrow T \text{ invert}}$

... poi (uso della fattorizz $A = MN$):

$$Ax = b \sim MNx = b$$

- cambio variabili: $c = Nx$
- $Mc = b$ caso semplice: determino c
- $Nx = c$ caso semplice: determino x

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

- verificare che la fattorizz è corretta (è LR)
- risolvere il sistema usando SA, SI.

<u>Pb</u>: come determinare una fattorizzazione?

- LR: eliminazione di Gauss;
- QR: procedura di ortonormalizzazione.

* PROCEDURA EG *

<u>Es</u>:

- $$\underset{A}{\overset{A^{(1)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}}} \xrightarrow{H_1} \underset{H_1 A^{(1)}}{\overset{A^{(2)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}} \xrightarrow{H_2} \underset{H_2 A^{(2)}}{\overset{A^{(3)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}}} = D$$

- $D = H_2 H_1 A$ con H_1, H_2 tr inf con 1 sulla diag

$$\Rightarrow A = \boxed{(H_1^{-1} H_2^{-1})} D$$

$= S$ (tr inf con $s_{kk} = 1$)

- $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 \\ -\lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}$

da H_2^{-1}

$\Rightarrow$ noti λ_{ij} costruire S è <u>banale</u> !

- calcolo λ_{ij} : ad es λ_{21} è l'<u>unico</u> t.c

$$\left[\text{riga 2 di } A^{(1)}\right] - \lambda_{21}\left[\text{riga 1 di } A^{(1)}\right]$$

$$= [\,0 \;\cdot\; \cdot\,] \quad (\text{riga 2 di } A^{(2)})$$

il primo elem dell'uguaglianza è

$$a_{21}^{(1)} - \lambda_{21}\, a_{11}^{(1)} = 0$$

$\Rightarrow$ <u>SE</u> $a_{11}^{(1)} \neq 0$ <u>ALLORA</u> $\lambda_{21} = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

PIVOT

MOLTIPLICATORE

<u>REALIZZAZIONE</u>

colonne da 1 a n-1

... quelle da modificare ...

```
for (k = 1:n-1),
    if A(k,k) = 0 then STOP
    else for j = k+1:n,
            A(j,k) = A(j,k) / A(k,k)
            A(j,k+1:n) = A(j,k+1:n) - A(j,k) A(k,k+1:n)
         end;
    end;
end;
```

k-esimo pivot nullo

righe da k+1 a n

moltiplicatore

Es :

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow D$$

$$D, \; S, \; A^{(2)}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D, \; S, \; A^{(3)}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$k=1$ $\quad a_{11} = 1 \neq 0 \rightarrow \boxed{j=2} \quad a_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{1}{1} = 1$

$$A(2,2:3) = [4,0] - 1 \cdot [2,1] = [2,-1]$$

$\boxed{j=3} \quad a_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} = \dfrac{1}{1} = 1$

$$A(3,2:3) = [6,0] - 1 \cdot [2,1] = [4,-1]$$

$k=2$ $\quad a_{22} = 2 \neq 0 \rightarrow \boxed{j=3} \quad a_{32} = \dfrac{a_{32}}{a_{22}} = \dfrac{4}{2} = 2$

$$A(3,3) = -1 - 2 \cdot (-1) = 1$$