* SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI *

<u>Pb</u>: dati $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oppure $\mathbb{C}^{n \times n}$),
$b \in \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n$)
determinare $x \in \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n$) t.c. $Ax = b$

$\forall b \; \exists !$ soluz $\Leftrightarrow$ A invertibile

<u>Metodi di soluzione</u>:

- diretti (con un numero <u>finito</u> di op aritmetiche su a_{ij} e b_i ottengo la sol <u>esatta</u>)
- iterativi (costruisco una <u>succes</u> di vettori che $\longrightarrow$ soluzione)

<u>Oss</u>: realizzando un m. diretto con un calcolatore (ovvero operando in $F(\beta, m)$) si ottiene una <u>SOLUZIONE APPROSSIMATA</u>.

<u>Es</u>: $n = 1$, $A = 3$, $b = 1$: $3x = 1$
$x = \frac{1}{3}$ (sol esatta con <u>una</u> operazione)
$\xi = 1 \oslash 3 = 0{,}33\ldots$ (sol <u>approssimata</u> con <u>una</u> pseudo-op)

Per ciascun metodo occorre studiare

- la PRECISIONE della approssimazione ottenuta
- il COSTO del calcolo dell'approssimazione

METODI DIRETTI

- Casi semplici (in base alla struttura di A)

(D) A diagonale ($i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$)

(1) A invertibile $\Leftrightarrow \forall k,\ a_{kk} \neq 0$
(2) Soluzione: $x_k = b_k / a_{kk} \quad k = 1, \dots, n$

(T) A triangolare $\begin{cases} i > j \Rightarrow a_{ij} = 0 & \text{tr SUPERIORE} \\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0 & \text{tr INFERIORE} \end{cases}$

(1) A invertibile $\Leftrightarrow \forall k,\ a_{kk} \neq 0$
(2) Soluzione: $x = SI(A, b)$ tr sup
$x = SA(A, b)$ tr inf

con: SOSTITUZIONE all'INDIETRO

---

function $x = SI(T, c)$

dati: T matrice $n \times n$ tr superiore, invertibile;
c colonna con n componenti;

uscita: x colonna con n comp t.c. $Tx = c$.

$x_n = c_n / t_{nn}$;

per $k = n-1, \dots, 1$ ripeti

$s_k = c_k - (t_{k,k+1} x_{k+1} + \dots + t_{k,n} x_n)$;

$x_k = s_k / t_{kk}$;

endfunction

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; SI(A,b) ...

Es: descrivere la procedura $x = SA(T, c)$ di SOSTITUZIONE in AVANTI, che determina la soluzione di un sistema con matrice tr inf.

(O) A ortogonale (• colonne di A base on di $\mathbb{R}^n$ risp ps canonico;
• $A^T A = I$
• $A^{-1} = A^T$)

(1) certamente invertibili

(2) soluzione: $x = A^T b$

(P) A matrice di permutazione (colonne [righe] di A sono una permutazione di quelle della matr identica

Es: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ...)

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Oss}}: \text{ A di permutaz} \\ \bullet \Rightarrow \text{A ortogonale} \\ \bullet\ v \in \mathbb{R}^n, \text{ le comp di } Av \text{ si ottengono} \\ \quad \underline{\text{permutando}} \text{ quelle di } v \end{array}}$

(1) certamente invertibile <

(2) Soluzione: $x = A^T b$ (ottenuta permutando...)