Zeri di $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

- **Metodo di Newton:**
  - $F(x) = \left(f_1(x), \dots, f_n(x)\right)^T$
  - $\forall\, i,j \;\exists\; \partial f_i / \partial x_j$
  - $n = 1$: $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (f' \neq 0)$
  - in gen: posto $J_F(x)$ = la matr $n \times n$ di comp i,j def da $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ [MATRICE JACOBIANA di F]

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[J_F(x^{(k)})\right]^{-1} F(x^{(k)})$$

(J_F non singolare)

Es: $F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2 \\ -x_1 + x_2^2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

- $J_F(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ -1 & 2x_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2 \times 2}$
- $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
  - $J_F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, non sing!
  - calcolo la soluz p di: $\boxed{J_F(x^{(0)})\, x = -F(x^{(0)})}$

    $\left(p = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \right)$

- $x^{(1)} = x^{(0)} + p \quad \left(= \begin{pmatrix} 1/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} \right)$

- Il m. di N. è il m. it ad un punto def da:

$$h(x) = x - [J_F(x)]^{-1} F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

- <u>TEO</u> (conv locale per m. ad un punto):
  - $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ suff regolare
  - $\alpha \in \mathbb{R}^n$ p.u di h

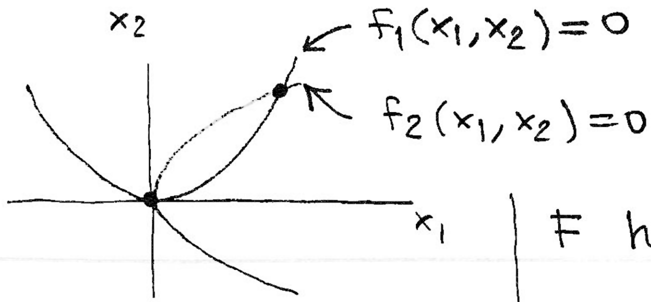
  <u>SE</u> tutti gli autovalori di $J_h(\alpha)$ hanno $\boxed{\text{modulo} < 1}$

  <u>ALLORA</u>: $\exists \rho > 0$ t.c

  $\| x^{(0)} - \alpha \| < \rho \Rightarrow$ la success generata dal m. it def da h a partire da $x^{(0)}$ <u>converge ad α</u>.

- <u>Oss</u> (teoria dei sistemi): α è uno stato di equilibrio STABILE del sist def da: $x^{(k+1)} = h(x^{(k)})$.

Es:



F ha due zeri:

$$\alpha' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $h(x) = x - F(x)$ (p.u di h = zero di F)
- $J_h(x) = I - J_F(x) = \begin{bmatrix} 1-2x_1 & -1 \\ -1 & 1-2x_2 \end{bmatrix}$
- $J_h(\alpha') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

p. caratt: $(1-\lambda)^2 - 1$

autoval: $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2$

<u>Oss</u>: Nelle ip del <u>Teo</u> conv loc... :

<u>SE</u> $J_h(\alpha)$ ha almeno un autovalore di $\boxed{\text{modulo} > 1}$

<u>ALLORA</u> il metodo it <u>non è praticam utilizz</u> per appross α.

- $J_h(\alpha'') = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; p.c: $(-1-\lambda)^2 - 1$, $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -2$

__Es__ (per casa): Calcolare h che def il m. di N. appl ad F e verif che $J_h(\alpha') = J_h(\alpha'') = 0$.

- __se__: F ha deriv seconde continue, J_F non singolare, α zero di F e $h(x) = x - [J_F(x)]^{-1} F(x)$

__allora__: $J_h(\alpha) = 0$

Teo conv loc $\Rightarrow$ $\forall \alpha$ zero di F

__se__ $J_F(\alpha)$ non singolare

__allora__ $\exists\, \rho(\alpha)$ t.c.

$\| x^{(0)} - \alpha \| < \rho(\alpha) \Rightarrow$ la success gen dal m. di N. a partire da $x^{(0)}$ __converge ad α__.

- __Se__ F suff regolare, $F(\alpha) = 0$ e $J_F(\alpha)$ non singolare, __allora__: odc ≥ 2.