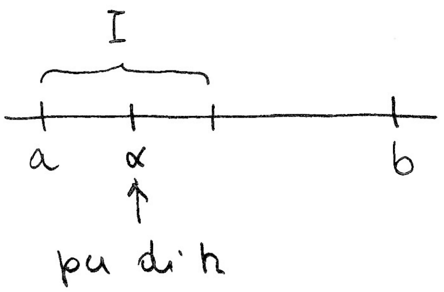
<u>dim</u> (scelta di $x_0$ per metodi ad un punto):




- $d \equiv \min\{|a-\alpha|, |b-\alpha|\}$
  (nel caso in fig: $|a-\alpha|$)

- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-\alpha| \leq d\}$

- $x \in I \Rightarrow |h(x) - \alpha| = |h(x) - h(\alpha)| =$

$$= |h'(\theta)|\,|x-\alpha| \leq L|x-\alpha| < |x-\alpha| \leq d$$

  $\theta$ tra $x$ ed $\alpha$ (e q.di in $[a,b]$)

  cioè: $x \in I \Rightarrow h(x) \in I$

- $\forall x \in I$ "va bene" come p.to iniziale. In part va bene l'estremo più vicino ad $\alpha$.

---

<u>Es</u>: $f(x) = x + \log x$ (ins def: $x > 0$)

- $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow$ # zeri di $f$, $\leq 1$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow \exists!$ zero: $\alpha \in (0,1)$.

Cons i m.it def da

$$h_1(x) = -\log x \;;\quad h_2(x) = e^{-x} \;;\quad h_3(x) = \frac{e^{-x}+x}{2}$$

- $\{$pu di $h_j\} = \{$zeri di $f\}$, $j = 1,2,3$

① $\forall x \in (0,1)$, $|h_1'(x)| = \left|-\frac{1}{x}\right| > 1 \Rightarrow |h_1'(\alpha)| > 1$

$\Rightarrow \nexists$ int che verifica ip (1) e (2) del Teo conv

## METODO DEF da $h_1$ NON UTILIZZABILE

② $|h_2'(x)| = |-e^{-x}|$ ; $[0,1]$ non verif ip (2) del Teo

- restringo l'int: $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ verif ip (1) e (2) del Teo

  con $|h_2'(x)| \leq 1/\sqrt{e}$ $\Rightarrow$ <u>metodo UTILIZZABILE</u>

- criterio di scelta di $x_0$: $x_0 = \frac{1}{2}$ va bene.

③ $|h_3'(x)| = \frac{1-e^{-x}}{2}$

- $[0,1]$ verif ip (1) e (2) del Teo con

  $|h_3'(x)| \leq \frac{1+1/e}{2}$ $\Rightarrow$ <u>metodo UTILIZZABILE</u>

- criterio di scelta di $x_0$: $x_0 = 1$ va bene.

---

<u>Oss</u>: se $|h'(\alpha)| > 1$ allora:

$\exists \bar{k}$ t.c. $x_k = \alpha$ per $k \geq \bar{k}$ oppure $x_k \not\to \alpha$

<u>Es</u>: $h(x) = A(x-\alpha) + \alpha$

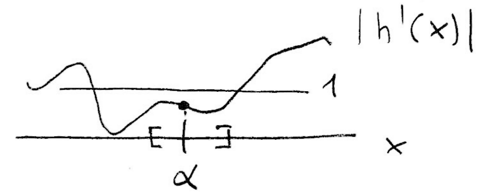
- $\alpha$ pu e $h'(\alpha) = A$
- $x_k - \alpha = A^k(x_0 - \alpha)$
- se $|A| > 1$ : $\forall \Lambda > 0 \ \exists \bar{k} : |x_k - \alpha| > \Lambda$ per $k \geq \bar{k}$.

**Teo** (studio locale della convergenza):

- $h$ con deriv prima cont, $\alpha$ p.u di $h$

(A) $|h'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \exists$ int che verifica ip (1) e (2) del Teo di conv

condiz SUFF per l'UTILIZZABILITA' del metodo




$h'$ cont e $|h'(\alpha)| < 1$

$\Rightarrow \exists$ int $\ni \alpha$ in cui $|h'(x)| \leq L < 1$

(B) $|h'(\alpha)| > 1 \Rightarrow \nexists$ int che verifica ...

condiz SUFF per la NON utilizzab del metodo

(C) $|h'(\alpha)| = 1$ ?

---

**Es** (per casa): $h(x) = 2 \operatorname{arctg} x$

- determ il numero di p.u di $h$ e separarli;
- decidere se il m. it def da $h$ sia utilizz per l'appross. In caso affermativo determ $x_0$ a partire dal quale la succes converge al p.u in esame.

# NEWTON

- f con deriv prima cont e $\neq 0$ in $[a,b]$

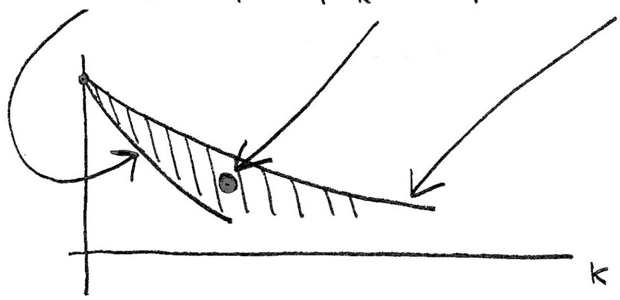
(1) SE f ha deriv seconda cont, detto $\alpha$ lo zero di f in $[a,b]$, allora:

$h'(\alpha) = 0 \Rightarrow \exists$ int $\subset [a,b]$ che verifica le ip (1) e (2) del Teo conv (METODO UTILIZZABILE)

(2) Oss: SE $0 < |h'(\alpha)| < 1$ allora

- $\exists \lambda, L : \quad 0 < \lambda < |h'(x)| < L < 1$ $\forall x$ in un opportuno int $\ni \alpha$

- $\forall k: \quad \lambda^k |x_0 - \alpha| \leq |x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|$




def: SE $0 < |h'(\alpha)| < 1$ il METODO def da h ha ORDINE di CONVERGENZA UNO quando utilizz per appross $\alpha$.

• SE $h'(\alpha) = 0$ e $h$ ha deriv terza continua

allora : $\forall \lambda \in (0,1)$ si ha

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_k - \alpha|}{\lambda^k} = 0$$

( la success $x_k - \alpha$ tende a zero PIÚ RAPIDAM di qualsiasi success esponenziale )

**def** SE $h'(\alpha) = 0$ e $h''(\alpha) \neq 0$ il METODO def da $h$ ha ORDINE di CONVERGENZA DUE quando utilizz per appross $\alpha$.