- Abbiamo stabilito che l'algo bisezione è <u>stabile</u> quando utilizzato per appross la funzione:

$$F : f \longrightarrow \{\text{zeri di } f\}$$

f ← funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ovvero che l'algo restituisca un valore, ξ_K, t.c

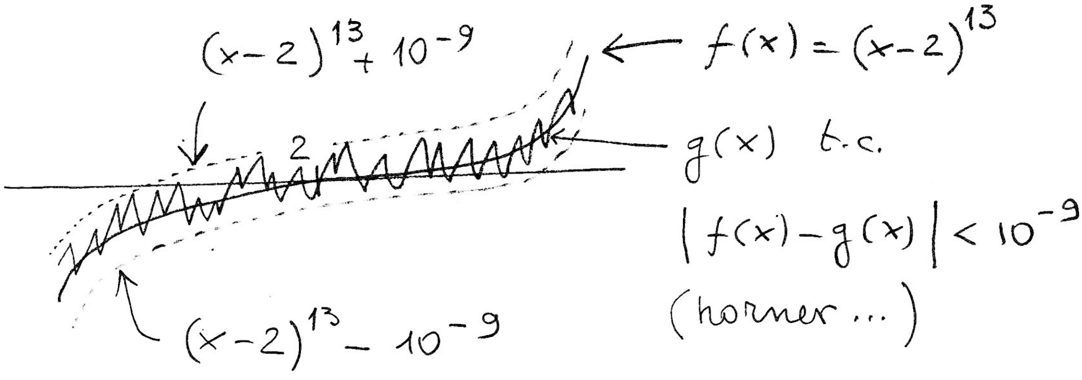
$$|\xi_K - \alpha| < rd(E)$$

con α zero di una funzione vicina ad f.

- MA:

$$\boxed{f \approx g \not\Rightarrow \{\text{zeri di } f\} \approx \{\text{zeri di } g\}}$$

ad es:



e $\{\text{zeri di } g\}$ contiene α : $|2 - \alpha| \approx 10^{-1}$.

dim: (A) ip $\Rightarrow$ $g(a) < 0$, $g(b) > 0$.

Ma g è continua ...

(B) • $f(\beta) - f(\alpha) = \begin{cases} f(\beta) & [f(\alpha) = 0] \\ f'(\theta)(\beta - \alpha) \end{cases}$

(Teo Lagrange: θ tra α e β)

• $f'(\theta) \neq 0 \Rightarrow \beta - \alpha = \dfrac{f(\beta)}{f'(\theta)}$

• $f(\beta) = f(\beta) - \underset{0}{\underset{\|}{g(\beta)}} \Rightarrow |f(\beta)| \leq \delta$

• $|f'(\theta)| \geq \min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)| = m$

$\Rightarrow |\beta - \alpha| \leq \dfrac{\delta}{m}$

Es: $f(x) = A(x - \alpha)$, $A > 0$

$g(x) = A(x - \alpha) - \delta$, $\delta > 0$

• g ha un solo zero: $\beta = \alpha + \dfrac{\delta}{A}$

dunque: $|\beta - \alpha| = \dfrac{\delta}{A}$ ....

* METODO di NEWTON *

dati : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con derivata $\left\langle \begin{array}{l}\text{continua}\\ \\ \neq 0\end{array}\right.$, $\gamma\in\mathbb{R}$;

- $x_0=\gamma$
- per $k=1,2,3\ldots$ ripeti :

    se $x_{k-1}\notin[a,b]$ allora STOP

    altrimenti $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

uscita : quando un opportuno criterio d'arresto è verificato, x_k.

Caso particolare di METODO ad UN PUNTO :

la f. che "definisce il metodo"

dati : $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua , $\gamma\in\mathbb{R}$

- $x_0=\gamma$
- per $k=1,2,\ldots$ ripeti :

    se $x_{k-1}\notin[a,b]$ allora STOP

    altrimenti $x_k = h(x_{k-1})$

uscita : quando un opportuno criterio d'arresto è verificato, x_k.

• <u>Come funziona</u>: Se $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

e la succ.ne $x_0, \; x_1 = h(x_0), \; x_2 = h(x_1), \dots$

è <u>CONVERGENTE</u> ad $\alpha \in \mathbb{R}$, <u>allora</u>: $\alpha = h(\alpha)$

ovvero <u>α è PUNTO UNITO di h.</u>

<u>dim</u>:

$$\begin{array}{l} x_0, \; x_1, \; x_2, \dots \longrightarrow \alpha \\ \| \| \\ h(x_0), \; h(x_1), \; h(x_2), \dots \longrightarrow \alpha \end{array}$$

Ma: $$\underbrace{\lim_{k\to\infty} h(x_k)}_{=\,\alpha} = h\Big(\underbrace{\lim_{k\to\infty} x_k}_{=\,\boxed{\alpha}}\Big)$$

<u>h CONTINUA</u>

q.di: $\alpha = h(\alpha)$.

<u>Dunque</u>: il metodo ad un punto def da h si può cercare di utilizz per <u>APPROSSIMARE i PUNTI UNITI di h.</u>

<u>Oss</u>: Nel m. di Newton si ha

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e $\boxed{\begin{array}{l} \alpha \in [a,b] \text{ pu di } h \\ \quad\quad \Longleftrightarrow \alpha \in [a,b] \text{ zero di } f \end{array}}$

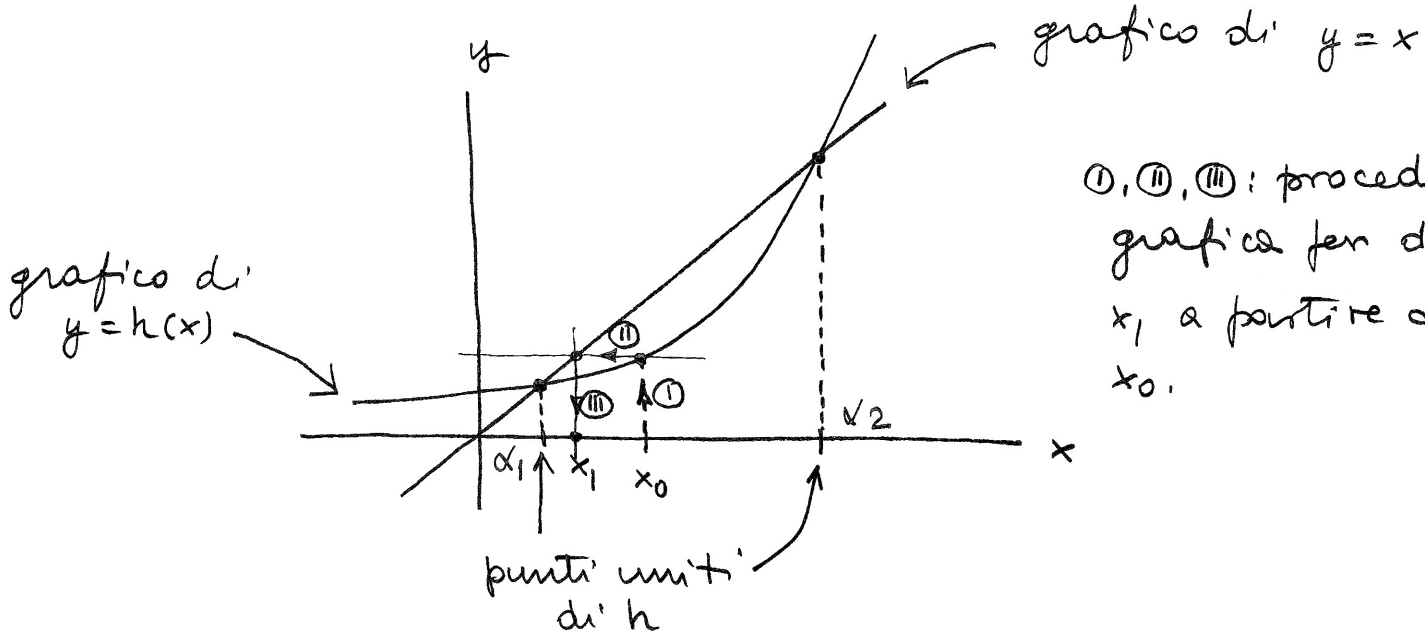
dim: • α pu di h $\sim$ $\alpha = h(\alpha)$

ovvero $\cancel{\alpha} = \cancel{\alpha} - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha) = 0$

• α zero di f $\sim$ $f(\alpha) = 0$

dunque $h(\alpha) = \alpha - \dfrac{\cancel{f(\alpha)}}{\cancel{f'(\alpha)}} = \alpha.$

COSTRUZIONI GRAFICHE



(I), (II), (III): procedura grafica per det x_1 a partire da x_0.

Pb: (1) $\exists\, \gamma$ t.c. $x_0 = \gamma$, $x_1 = h(x_0)$, ... è conv?

(2) Se $\exists$, come si determina?

TEO (di convergenza)

Siano $[a,b]$, $h:[a,b] \to \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $\gamma \in [a,b]$ t.c.

(1) $\exists \alpha$ pu di h in $[a,b]$;

(2) $\exists L \in [0,1)$ t.c. $\forall x \in [a,b]$ si ha $|h'(x)| \leq L$

(3) la success $x_0 = \gamma$, $x_1 = h(x_0)$, $x_2 = h(x_1)$, ... e' in $[a,b]$

Allora:

1. α è l'unico pu di h in $[a,b]$;

2. la success $x_0 = \gamma$, $x_1 = h(x_0)$, $x_2 = h(x_1)$, ... è convergente (ad α)