- def (STABILITÀ)

L'algo $\tilde{F}$ è STABILE quando utilizzato per appross il valore di F in x SE

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists\ \varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \mathbb{R} \text{ t.c.:} \\ \qquad \tilde{F}(x) = (1+\varepsilon_0)\, F((1+\varepsilon_1)x) \\ \qquad\quad \text{e} \quad \varepsilon_0, \varepsilon_1 \text{ "piccoli"} \end{array}}$$

Oss:

(1) $\tilde{F}$ è stabile significa che $\tilde{F}(x)$ è un'appross accurata del valore di F in un punto $\tilde{x}$ vicino ad x nel senso che:

$$\tilde{x} = (1+\varepsilon_1)x \quad \text{e} \quad \varepsilon_1 \text{ "piccolo"}$$

(2) $\tilde{F}$ accurato $\Rightarrow$ $\tilde{F}$ stabile ma NON vicev.

ES: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{F}: \mathbb{R} \to F(\beta, m)$ def da

$$\tilde{F}(x) = rd(F(rd(x)))$$

(in tal caso $\tilde{F}$ è l'ALGORITMO IDEALE per appross i valori di F !)

Ma:

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ t.c: } \quad rd(x) = (1+\varepsilon)\,x \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{e } |\varepsilon| \le u = \tfrac{1}{2}\beta^{1-m} \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

(<u>Per casa</u>: dim!)

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ t.c:

$$\tilde{F}(x) = rd(F(rd(x))) = (1+\varepsilon_1)\,F(rd(x)) =$$

$$= (1+\varepsilon_1)\,F((1+\varepsilon_2)\,x)$$

$$\text{e } |\varepsilon_1| \le u,\ |\varepsilon_2| \le u$$

ovvero: $\forall x \in \mathbb{R}$ l'algo $\tilde{F}$ <u>è stabile</u> quando utilizz per appross $F(x)$.

<u>Es</u>: $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def da

$$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$\tilde{F}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow F(\beta, m)$ def da

$$\tilde{F}(x_1, x_2) = rd(x_1) \oplus rd(x_2)$$

si ha: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ \exists\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ t.c

$$rd(x_1) = (1+\varepsilon_1)\,x_1 \quad \text{e} \quad |\varepsilon_1| \le u$$

$$rd(x_2) = (1+\varepsilon_2)\,x_2 \quad \text{e} \quad |\varepsilon_2| \le u$$

e $\exists \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ t.c:

$$rd(x_1) \oplus rd(x_2) = (1+\varepsilon_0)\left(rd(x_1) + rd(x_2)\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{F}(x_1, x_2) = rd(x_1) \oplus rd(x_2)$$
$$= (1+\varepsilon_0)\left(rd(x_1) + rd(x_2)\right)$$
$$= (1+\varepsilon_0)\left((1+\varepsilon_1)x_1 + (1+\varepsilon_2)x_2\right)$$

ovvero: l'algo $\tilde{F}$ <u>è stabile</u> quando utilizz

per appross $F(x_1, x_2)$.

<u>Oss</u>: <u>def</u> (STABILITA')

L'algo $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to F(\beta, m)$ è STABILE quando utilizz per appross il valore di $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^n$ <u>SE</u>

$\exists\ \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$ t.c:

$$\tilde{F}(x_1, \dots, x_m) = (1+\varepsilon_0)\, F\left((1+\varepsilon_1)x_1, \dots, (1+\varepsilon_m)x_m\right)$$

e $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ "piccoli"

- <u>def</u> (CONDIZIONAMENTO)

Siano $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ t.c: $x \neq 0$ e $F(x) \neq 0$.

Il calcolo di F in x è BEN CONDIZIONATO

<u>SE</u>

$\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, posto:

$$F\big((1+\varepsilon_1)x\big) = (1+\varepsilon_0)\, F(x)$$

si ha: ε_1 "piccolo" $\Rightarrow$ ε_0 "piccolo"

<u>Oss</u>:

(1) Il calcolo di F in x è ben condizionato significa che per ogni $\tilde{x}$ vicino ad x (nel senso che $\tilde{x} = (1+\varepsilon_1)x$ e ε_1 "piccolo") il valore $F(\tilde{x})$ è un'appross accurata di $F(x)$.

(2) La def, contrariamente a quelle di accuratezza e di stabilità, riguarda <u>solo</u> F.

<u>Es</u>: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivata prima continua, $x \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) \neq 0$.

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{TEO}} \text{ (di LAGRANGE):} \\ \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ con deriv prima continua} \\ \quad \forall\, a < b \in \mathbb{R},\ \exists\, \theta \in (a,b) \text{ t.c:} \\ \quad \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\theta) \end{array}}$

$$\Downarrow$$

$\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\exists\, \theta$ tra x e $(1+\varepsilon_1)x$ t.c:

$$\begin{aligned} F((1+\varepsilon_1)x) &= F(x + \varepsilon_1 x) \\ &= F(x) + F'(\theta)\, \varepsilon_1 x \\ &= \Big[1 + \underbrace{\frac{F'(\theta)}{F(x)} \varepsilon_1 x}_{= \varepsilon_0}\Big] F(x) \end{aligned}$$

Per ε_1 "piccolo" si approssima θ con x (infatti $(1+\varepsilon_1)x \approx x$) e:

$$\varepsilon_0 \approx \underbrace{\boxed{\frac{F'(x)}{F(x)}\, x}}_{C(x)} \cdot \varepsilon_1$$

- Il condiz del calcolo di F in x <u>dipende</u> dal valore di $C(x)$...

- ad es:

(a) $F(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow C(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, x$

- $\lim_{x \to 0} C(x) = 1 \Rightarrow$ calcolo di F in $x \approx 0$ ben condiz

- $\lim_{x \to \pi} |C(x)| = +\infty \Rightarrow$ calcolo di F in $x \approx \pi$ NON ben condizionato

(b) $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Si ha:

$$F((1+\varepsilon_1)x_1, (1+\varepsilon_2)x_2) = (1+\varepsilon_1)x_1 + (1+\varepsilon_2)x_2$$

$$= \left[1 + \frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_1 + \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_2\right](x_1+x_2)$$

$$\varepsilon_0 = C_1(x_1,x_2)\,\varepsilon_1 + C_2(x_1,x_2)\,\varepsilon_2 \qquad F(x_1,x_2)$$

- se $x_1 x_2 > 0$ allora

$$|C_1(x_1,x_2)| < 1 \quad \text{e} \quad |C_2(x_1,x_2)| < 1$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_0| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$$

e $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ "piccoli" $\Rightarrow$ ε_0 "piccolo"

dunque il calcolo di F è ben condiz

• se $x_1 x_2 < 0$ e, ad es $x_1 = -1$, $x_2 = 1+\lambda$:

$$\lim_{\lambda \to 0} |c_1(x_1, x_2)| = +\infty \quad \text{e}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} |c_2(x_1, x_2)| = +\infty$$

Il calcolo di F in $(-1, 1+\lambda)$ è, per $\lambda \approx 0$, NON ben condizionato.

<u>TEO</u> (STABILITÀ + CONDIZIONAM $\Rightarrow$ ACCURATEZZA)

siano $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ t.c: $x \neq 0$ e $F(x) \neq 0$, $\tilde{F}$ l'algoritmo utilizz per appross F in x.

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{F} \text{ STABILE} \\ \quad + \\ \text{Calcolo di } F \text{ in} \\ x \text{ BEN CONDIZIONATO} \end{array} \Rightarrow \tilde{F} \text{ ACCURATO}}$$

<u>dim</u>:

stabilità

$\Downarrow$

$\exists\, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ t.c: $\tilde{F}(x) = (1+\varepsilon_0)\, F((1+\varepsilon_1)x)$

e $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ "piccoli" calcolo di F ben condiz

$$\Downarrow$$

posto $F((1+\varepsilon_1)x) = (1+\varepsilon) F(x)$

si ha ε "piccolo"

Allora:

$$\tilde{F}(x) = (1+\varepsilon_0)(1+\varepsilon) F(x)$$

$$= (1+\theta) F(x)$$

con $\theta = \varepsilon_0 + \varepsilon + \varepsilon_0 \varepsilon$, "piccolo".

Stabilità dell'algo di bisezione

- funzione da approssimare:

$$F : f \longrightarrow \mathbb{R}$$

def da: $F(f) = \alpha$ zero di f.

- $\tilde{f} : \mathbb{R} \to F(2,53)$ algo utilizz per appross i valori di f def da: $\tilde{f}(x) = \varphi(rd(x))$ con

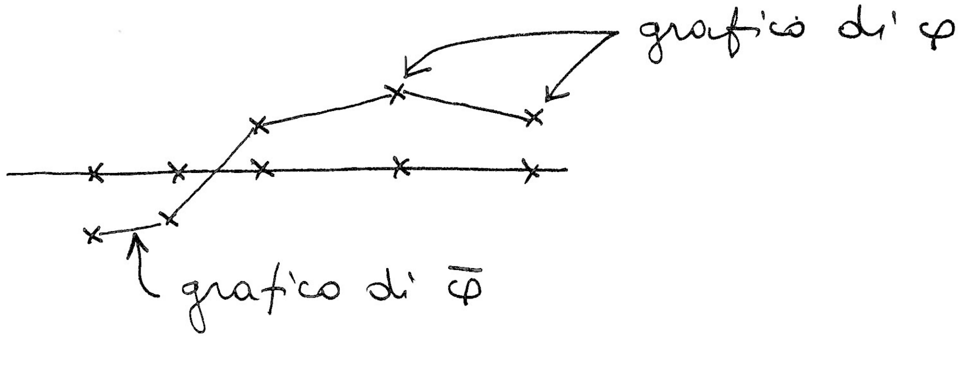
$\varphi : F(2,53) \longrightarrow F(2,53)$ t.c. $\forall \xi \in F(2,53)$, $\varphi(\xi) \approx f(\xi)$

- $a, b, E \in \mathbb{R}$ t.c. $\tilde{f}(a)\tilde{f}(b) < 0$ ed E "non troppo piccolo" (maggiore della min dist tra elem consecutivi di $F(2,53)$...)

- $z =$ bisezione$(\tilde{f}, a, b, E)$

$\Rightarrow |z - \beta| < rd(E)$, con β zero di $\overline{\varphi}$

funzione continua il cui grafico è la spezzata che unisce i punti del grafico di φ:



- l'algo bisezione trova un'appross accurata di uno zero della funzione $\overline{\varphi} \approx \overline{f}$

  $\uparrow$

  funz cont il cui grafico è la spezz che unisce i punti $(\xi, f(\xi))$, $\xi \in F(2,53)$

- <u>SE</u> $\overline{f} \approx f$ allora l'algo bisez, quando utilizz per appross F, è <u>stabile</u>.

<u>ESPERIMENTO</u>:

$$\tilde{f}_1(x) = \varphi_1(rd(x)) \qquad \tilde{f}_2(x) = \varphi_2(rd(x))$$

con: $\max |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| \approx 10^{-9}$

Posto:

$$z_1 = \text{bisezione}(\tilde{f}_1, a, b, E)$$
$$z_2 = \text{bisezione}(\tilde{f}_2, a, b, E)$$

si ottiene: $|z_1 - z_2| \approx 10^{-1} \gg 10^{-9}$!

Ovvero:

$$\varphi_1 \approx \varphi_2 \Rightarrow \overline{\varphi}_1 \approx \overline{\varphi}_2 \not\Rightarrow \text{zeri } \overline{\varphi}_1 \approx \text{zeri } \overline{\varphi}_2$$

il calcolo di F in $\overline{\varphi}_1$ NON è ben condizionato