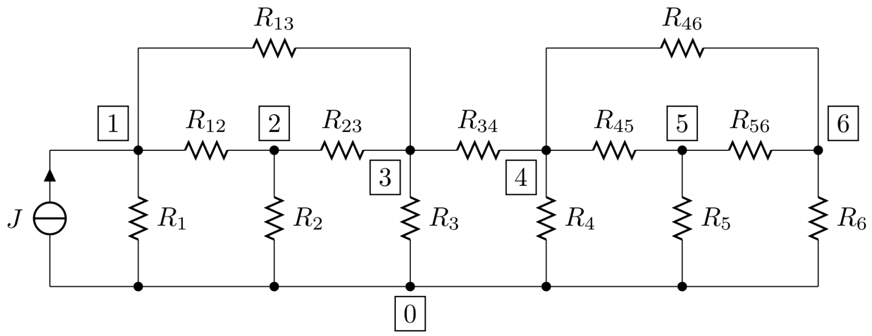
Esercizio

Si consideri la rete lineare di figura.



Detta x_k la tensione del nodo $\boxed{k}$ rispetto al nodo $\boxed{0}$ ed x la colonna di componenti $x_1, \dots, x_6$, la legge di Kirchhoff delle correnti (somma delle correnti uscenti dal nodo = zero) per i nodi $1, \dots, 6$ rispettivamente, assume la forma di un sistema di equazioni lineari nell'incognita x:

$$Ax = b \quad , \quad A \in \mathbf{R}^{6\times 6} \text{ e } b \in \mathbf{R}^6$$

(1) Determinare A e b, e constatare che A risulta *simmetrica* ed *a predominanza diagonale forte* (quindi *invertibile*) per tutti i valori positivi delle resistenze. [Come cambia la matrice A se si elimina la resistenza R_2 o la resistenza R_{23}?]

Si assegnino alle resistenze $R_1, \dots, R_6$ il valore $100\,\Omega$, a tutte le altre il valore $20\,\Omega$ ed al generatore il valore $0.5\,$A.

(2) Dopo aver constatato che `A(1:k,1:k)` è $A[k]$, il minore principale di testa di A di ordine k, constatare che `det(A(1:k,1:k))` > 0. È possibile dedurne che A risulta, oltre che simmetrica, *definita positiva*?[1]

(3) Siano P la matrice di permutazione, S quella triangolare inferiore e D quella triangolare superiore ottenute applicando ad A la procedura definita in `EGPP.sci`.[2] Constatare che P è la *matrice identica*.

(4) Utilizzare il comando `cond` per ottenere approssimazioni del numero di condizionamento delle matrici A, S e D. Discutere il *condizionamento* dei sistemi $Ax = b$, $Sc = Pb$ e $Dx = c$.

(5) Utilizzare opportunamente le procedure definite in `SA.sci` e `SI.sci` per determinare un'approssimazione $\hat{x}$ della soluzione x^* del sistema $Ax = b$.

[1] Vedere il riassunto della Lezione 16 del 13 aprile sulla pagina web del corso.

[2] I files `.sci` a cui si fa riferimento si trovano sulla pagina web del corso nella sezione **altro materiale didattico**.

(6) Determinare $g_1, \ldots, g_6$ tali che, posto $\Delta = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_6)$, si abbia:

$$(A + \Delta)\hat{x} = b$$

ovvero tali che $\hat{x}$ risulti la soluzione *esatta* del sistema *perturbato* $(A + \Delta)x = b$. Discutere poi se sia applicabile il *Teorema di condizionamento*[3] per ottenere una stima dell'errore relativo commesso approssimando x_* con $\hat{x}$.

(7) Interpretare i valori $g_1, \ldots, g_6$ determinati nel punto precedente come perturbazioni dei valori delle conduttanze $1/R_1, \ldots, 1/R_6$. Questo equivale ad interpretare i valori $\hat{x}_k$ come le tensioni dei nodi nella *rete perturbata* ottenuta da quella di figura assegnando alle resistenze $R_1, \ldots, R_6$ i valori ...

(8) Determinare $r \in \mathbf{R}^6$ tale che si abbia:

$$A\hat{x} = b + r$$

ovvero tale che $\hat{x}$ risulti la soluzione *esatta* del sistema *perturbato* $Ax = b + r$. Discutere poi se sia applicabile il *Teorema di condizionamento* per ottenere una stima dell'errore relativo commesso approssimando x_* con $\hat{x}$ ed, eventualmente, confrontare il risultato con quello ottenuto al punto (6). Infine, discutere la possibilità di interpretare $\hat{x}_k$ come il vettore delle tensioni dei nodi di una *rete perturbata* ottenuta opportunamente da quella di figura.

[3] Vedere il riassunto della Lezione 18 del 15 aprile sulla pagina web del corso.