Es (Metodi di Runge-Kutta)

Scelto h_k:

- $s_1 = F(t_k, x_k)$
- $s_2 = F(t_k + a h_k, x_k + a h_k s_1)$
- $x_{k+1} = x_k + h_k (b_1 s_1 + b_2 s_2)$

$\boxed{\text{METODO a 2 STADI}}$

si determinano poi i valori dei parametri a, b_1, b_2 in modo da ottenere l'ORDINE più elevato possibile.

Si ha:

$$F(t_k + ah, x_k + ahs_1) =$$

$$= F(t_k, x_k) + ha \left[\partial_t F(t_k, x_k) + \partial_x F(t_k, x_k) s_1 \right]$$

$$+ \text{termini in } h^2, h^3 \ldots$$

e quindi:

$$x_{k+1} = x_k + h b_1 F(t_k, x_k) +$$

$$+ h b_2 \left[F(t_k, x_k) + ha \partial_t F(t_k, x_k) + \right.$$

$$\left. + ha F(t_k, x_k) \partial_x F(t_k, x_k) + \ldots \right]$$

$$= x_k + h(b_1 + b_2) F(t_k, x_k) +$$

$$+ h^2 a b_2 \left[\partial_t F(t_k, x_k) + F(t_k, x_k) \partial_x F(t_k, x_k) \right]$$

$$+ \text{termini in } h^3, h^4 \ldots$$

Ma, posto $z(t) = x(t; t_k, x_k)$ si ha:

$$z(t+h) = z(t) + z'(t) h + z''(t) \frac{h^2}{2} + \ldots$$

ovvero, per $t = t_k$:

$$z(t_k + h) = \underbrace{z(t_k)}_{= x_k} + \underbrace{z'(t_k)}_{= F(t_k, x_k)} h + \underbrace{z''(t_k)}_{= \partial_t F(t_k, x_k) + F(t_k, x_k) \partial_x F(t_k, x_k)} \frac{h^2}{2} + \ldots$$

dunque:

$$el(h) = x_{k+1} - z(t_k + h) =$$

$$= h(b_1 + b_2 - 1) F(t_k, x_k) +$$

$$+ h^2 \left(a b_2 - \frac{1}{2}\right) \left[\partial_t F + F \partial_x F \right] +$$

$$+ \text{Termini in } h^3, h^4 \ldots$$

Per ottenere

ORDINE 1 : $b_1 + b_2 - 1 = 0$

ORDINE 2 : $b_1 + b_2 - 1 = 0$ e

$a b_2 - \frac{1}{2} = 0$

ecc

Posto : $b_2 = \theta \begin{cases} \neq 0 \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$

$b_1 = 1 - \theta$

$a = \dfrac{1}{2\theta}$

$\forall \theta$ si ottengono METODI di ORDINE 2.

~~Ad~~ es:

- $\theta = 1$ $\left(a = 1/2 ,\ b_1 = 0 ,\ b_2 = 1 \right)$

$$\begin{cases} s_1 = F(t_k, x_k) \\ s_2 = F\left(t_k + \frac{1}{2} h_k ,\ x_k + \frac{1}{2} h_k s_1\right) \\ x_{k+1} = x_k + h_k s_2 \end{cases}$$

METODO di EULERO MODIFICATO

- $\theta = \frac{1}{2}$ $\left(a = 1 ,\ b_1 = \frac{1}{2} ,\ b_2 = \frac{1}{2} \right)$

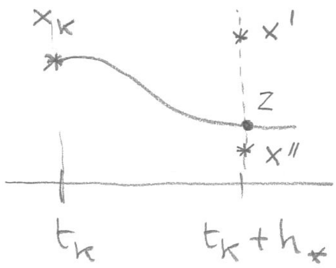
$$\begin{cases} s_1 = F(t_k, x_k) \\ s_2 = F(t_k + h_k ,\ x_k + h_k s_1) \\ x_{k+1} = x_k + h_k \dfrac{s_1 + s_2}{2} \end{cases}$$

METODO di HEUN

Scelta del passo

idea: utilizz due metodi di <u>ordine diverso</u>

per calcolare due appross x', x''...



$$x' - z = C h_*^p + O(h_*^{p+1})$$

$$x'' - z = T h_*^{p+1} + O(h_*^{p+2})$$

$$\Rightarrow x' - x'' = C h_*^p + O(h_*^{p+1})$$

Per h_* suff piccolo: $x' - x'' \simeq C h_*^p \simeq el_*$

err locale commesso dal metodo di ord più basso con h_*

Allora: $C \simeq \dfrac{x' - x''}{h_*^p}$ e si sceglie h_k

imponendo:

$$EL_{k+1} \simeq |C h_k^p| = E \Rightarrow \boxed{h_k = \left[\frac{E}{|x' - x''|}\right]^{1/p} h_*}$$

In teoria, per scegliere il passo si possono utilizz due metodi QUALSIASI per ott x' e x''.

In pratica, per contenere il costo del calcolo si procede scegliendo metodi "correlati".

ES (RK (1,2)):

$$\begin{cases} s_1' = F(t_k, x_k) \\ x' = x_k + h_* s_1' \end{cases}$$

(RK1 = Eulero espl.)

$$\begin{cases} s_1'' = F(t_k, x_k) = s_1' \\ s_2'' = F(t_k + h_*, x_k + h_* s_1') \\ x'' = x_k + h_* \dfrac{s_1' + s_2''}{2} \end{cases}$$

(Heun)

$$\Rightarrow \boxed{x' - x'' = h_* \dfrac{s_1' - s_2''}{2}}$$

stima err loc EE con h_*

e, dopo aver posto ... $h_k = \sqrt{\dfrac{E}{|x' - x''|}}\, h_*$:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + h_k s_1'}$$

nuova appross