- Nel metodo di EULERO ESPLICITO si ha $EL \equiv h^2$. Questo si esprime dicendo che "il metodo di E. esplicito ha <u>ORDINE UNO</u>"

$$EL \equiv h^2 , \quad ET_M \equiv \sqrt{EL} \equiv h^{1}$$

- Se $EL \equiv h^3$ si avrebbe:

$$h_{min} \equiv \sqrt[3]{EL\_MAX}$$

$$N_{max} \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{EL\_MAX}}$$

$$ET_M \equiv (EL\_MAX)^{1-\frac{1}{3}} = (EL\_MAX)^{\frac{2}{3}}$$

($EL \equiv h^3 \Rightarrow ET_M \equiv h^2$, metodo di ORDINE DUE; si ottiene, ad es utilizz lo sv di Taylor di $z(t)$ arrestato al 2° ordine ...)

ordine 1 $(EL \equiv h^2)$

$$EL' = EL \cdot 10^{-2}$$

$$\Downarrow$$

$$h'_{min} = h_{min} \cdot 10^{-1}$$

$$N'_{max} = N_{max} \cdot 10$$

$$ET'_{max} = ET_{max} \cdot 10^{-1}$$

ordine 2 $(EL \equiv h^3)$

$$EL' = EL \cdot 10^{-2}$$

$$\Downarrow$$

$\simeq 2{,}2 \cdot 10^{-1}$

$$h'_{min} = h_{min} \cdot \boxed{10^{-\frac{2}{3}}}$$

$$N'_{max} = N_{max} \cdot \boxed{10^{\frac{2}{3}}} \leftarrow \simeq 4{,}6$$

$$ET'_{max} = ET_{max} \cdot \boxed{10^{-\frac{4}{3}}}$$

$\simeq 4{,}6 \cdot 10^{-2}$

Esercizio: Modificare opportunam il file

LMV_TS_1_pv.sci

in modo che il nuovo file costituisca una realizzazione del metodo TS2.

Oss: Si devono esplicitare due punti:

(A) come si sceglie il passo h_k

(B) come si calcola, scelto h_k, il valore x_{k+1}

Il metodo TS2 si ottiene considerando lo sv di Taylor di una soluz $z(t)$ dell'eq diff in esame:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))$$

nel generico istante τ...

$\forall \tau, h \; \exists \xi \in [\tau, \tau+h]$ t.c

$$z(\tau+h) = z(\tau) + h\, z'(\tau) + \frac{1}{2} h^2 z''(\tau) + $$
$$+ \frac{1}{6} h^3 z'''(\xi)$$

La relazione che consente di calcolare l'appross x_{k+1} all'ist t_{k+1} da x_k, t_k e h_k si ottiene dallo sviluppo precedente con $\tau = t_k$, $h = h_k$ ed eliminando il resto $\left(\frac{1}{6} h^3 z'''(\xi)\right)$:

$$x_{k+1} = z(t_k) + h_k z'(t_k) + \frac{1}{2} h_k^2 z''(t_k)$$

e considerando che in questo caso:

$$z(t) = x(t; t_k, x_k)$$

Si ottiene:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + h_k F(t_k, x_k) + \frac{1}{2} h_k^2 G(t_k, x_k)}$$

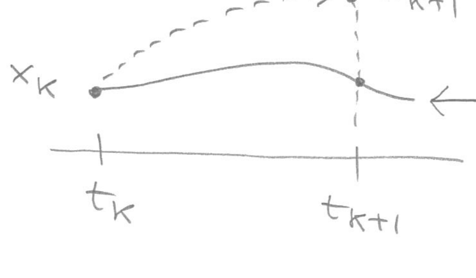
dove $G(t,x)$ è la funzione che restituisce il valore della <u>derivata seconda</u> all'ist t della soluz dell'eq. diff $x(t; t, x)$, ovvero:

$$G(t,x) = \partial_t F(t,x) + \partial_x F(t,x)\, F(t,x)$$

nel caso di $x \in \mathbb{R}$,

$$G(t,x) = \partial_t F(t,x) + J_F(t,x)\, F(t,x)$$

nel caso di $x \in \mathbb{R}^n$.



Per l'errore locale:

$\leftarrow x(t; t_k, x_k) = z(t)$

$$el_{k+1} = x_{k+1} - z(t_{k+1})$$

$$= x_{k+1} - z(t_k + h_k) =$$

$$= \left[x_k + h_k F(t_k, x_k) + \frac{1}{2} h_k^2 G(t_k, x_k) \right]$$

$$- \left[z(t_k) + h_k z'(t_k) + \frac{1}{2} h_k^2 z''(t_k) + \frac{1}{6} h_k^3 z'''(\xi) \right]$$

$$= \boxed{-\frac{1}{6} h_k^3 z'''(\xi)}$$

Dunque:

- TS2 è un metodo di <u>ORDINE 2</u>
- una stima calcolabile dell' err locale all' ist t_k è:

$$\boxed{EL_k \simeq \frac{1}{6} h_{k-1}^3 \, | z'''(t_{k-1}) |}$$

<u>Allora</u>:

(A) Il passo h_k si sceglie imponendo stima $EL_{k+1} = E$. Si ottiene:

$$\boxed{h_k = \sqrt[3]{\frac{6E}{\| z'''(t_k) \|}}}$$

con $z'''(t_k) = H(t_k, x_k)$

dove:

$$H(t,x) = \partial_t G(t,x) + \partial_x G(t,x)\, F(t,x)$$

nel caso $x \in \mathbb{R}$ e

$$H(t,x) = \partial_t G(t,x) + J_G(t,x)\, F(t,x)$$

nel caso $x \in \mathbb{R}^n$.

(B) Il valore x_{k+1} si calcola come gia' detto.

<u>Oss</u>: l'intestazione della function sara' del tipo:

```
[T, X, PASSO, stimaEL] =
    LMV_TS_2_pv(xØ, tØ, tf, fct, fct2, fct3,...
        EL_MAX, dialogo)
```

dove:

- fct realizza $F(t,x)$
- fct2 realizza $G(t,x)$
- fct3 realizza $H(t,x)$

Es. 1

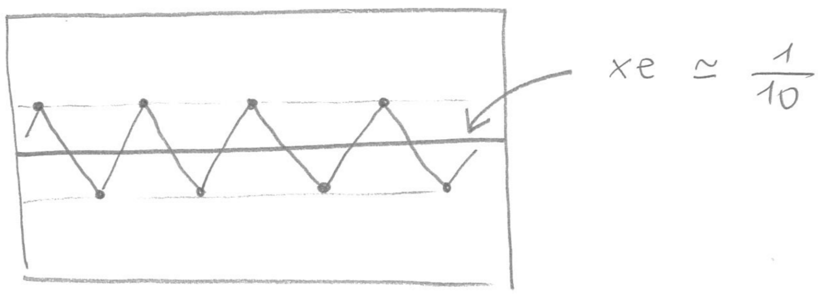
Pb di Cauchy : $\begin{cases} \dot{x} = -100\,x + 10 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ su $[0,2]$

si ottengono i grafici riportati alla pag seguente utilizz la funz

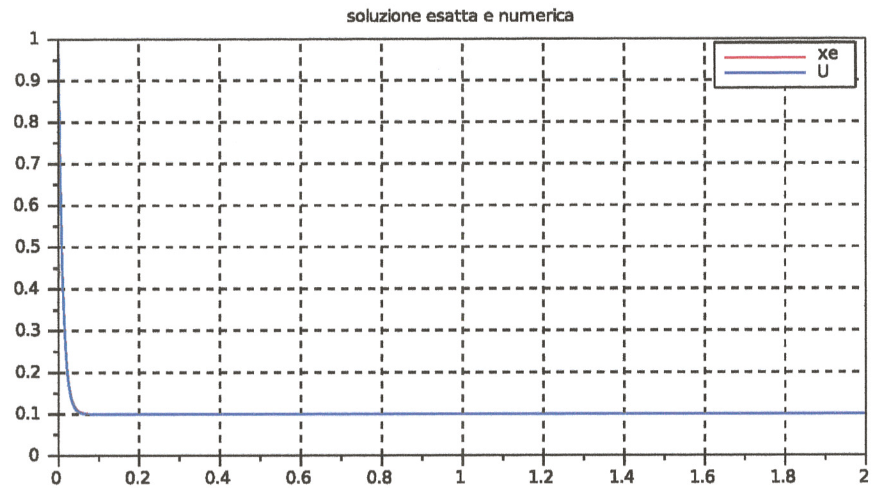
LMV_TS_1_pv con EL_MAX $= 10^{-4}$.

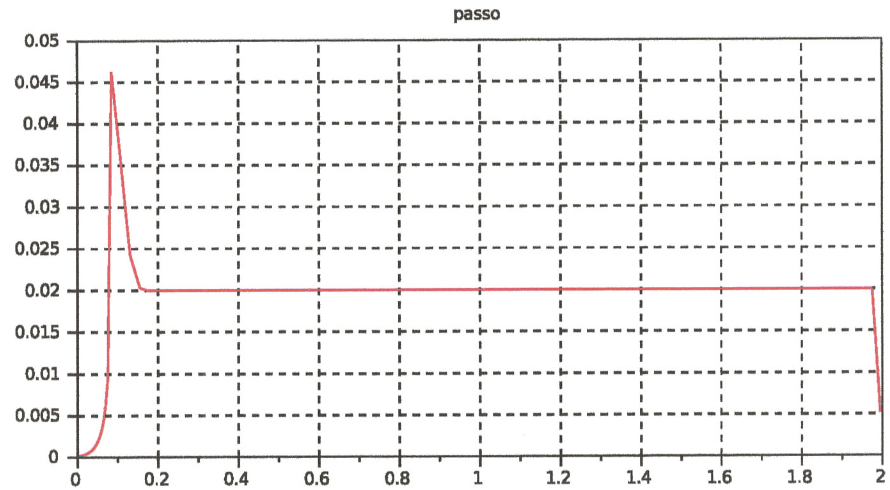
Oss :

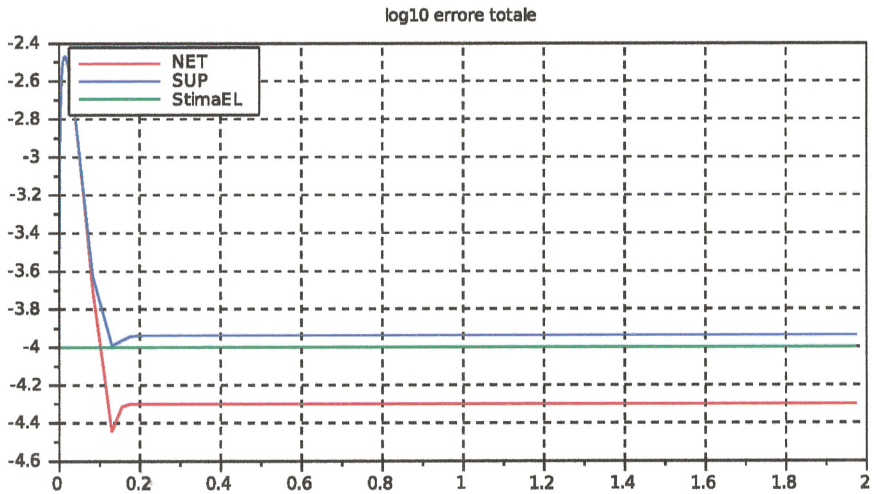
1. Ingrandendo opportunam l'int $0{,}2 \leq t \leq 2$ si constata la presenza di OSCILLAZIONI nella soluz numerica :



* ATTENZIONE * la teoria garantisce che ET_k







Problema: dx/dt = -100 x + 10

Procedura: LMV_TS_1_pv

SUP(k) = EL_MAX + SUP(k-1)*exp(-100*PASSO(k-1))

EL_MAX = 1.000D-04

Errore totale massimo = 3.373D-03

Numero passi = 2.260D+02

sarà piccolo quando EL_MAX è scelto opportunam piccolo. <u>NON</u> si prendono in considerazione proprietà <u>QUALITATIVE</u> della soluzione.

(2) Per $t > 0{,}2$ il passo si assesta al valore costante $h = 0{,}02$ corrisp ad una succes

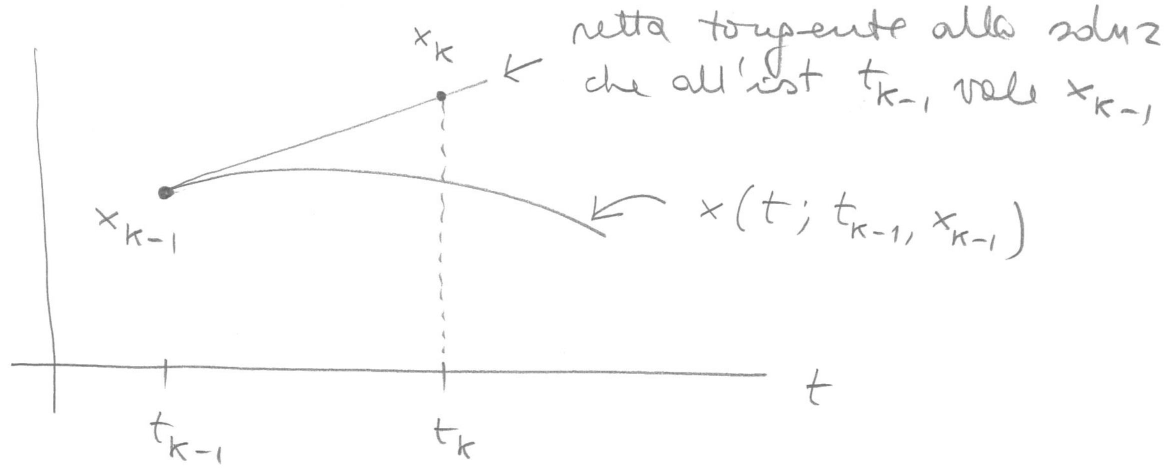
$$x_k - \frac{1}{10} = (1 - 100h)^k \left(x_0 - \frac{1}{10}\right)$$

oscillante $\left(1 - 100 \cdot \frac{2}{100} = -1 \right)$!

(3) L'andam qualitativam oscillante si può spiegare anche considerando l'int. geom del metodo di Eulero in avanti:

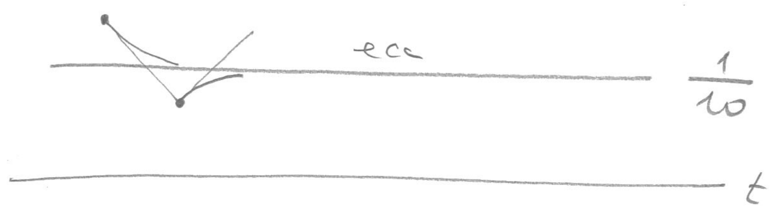
$$x_k = x_{k-1} + h_{k-1} F(t_{k-1}, x_{k-1})$$

$$\sim \frac{x_k - x_{k-1}}{h_{k-1}} = F(t_{k-1}, x_{k-1}) = \dot{x}_{k-1}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} x_k \in \text{retta tg alla soluz dell' eq diff} \\ \text{che all' ist } t_{k-1} \text{ passa per } x_{k-1} \end{array}}$$

Nel caso in esame:



Es. 2 Pb di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

su $[0, 2\pi]$

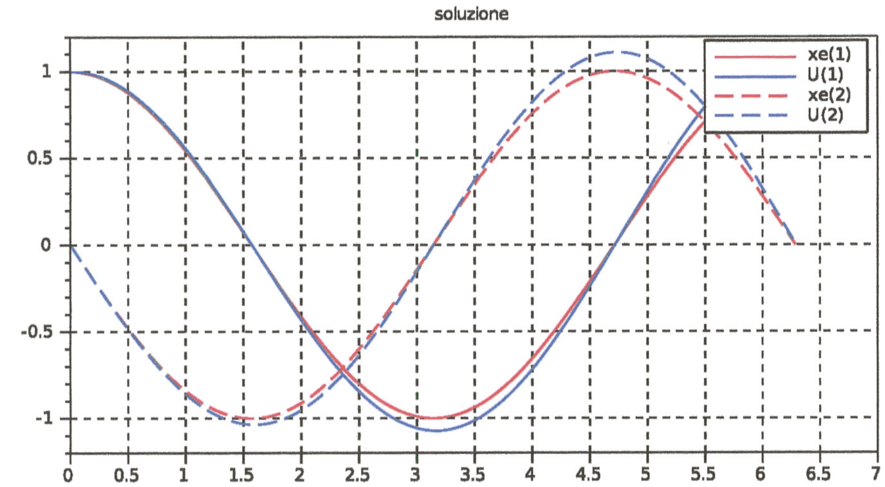
Si riscrive (per poter utilizz la proc ...) come sist di due eq del primo ordine:

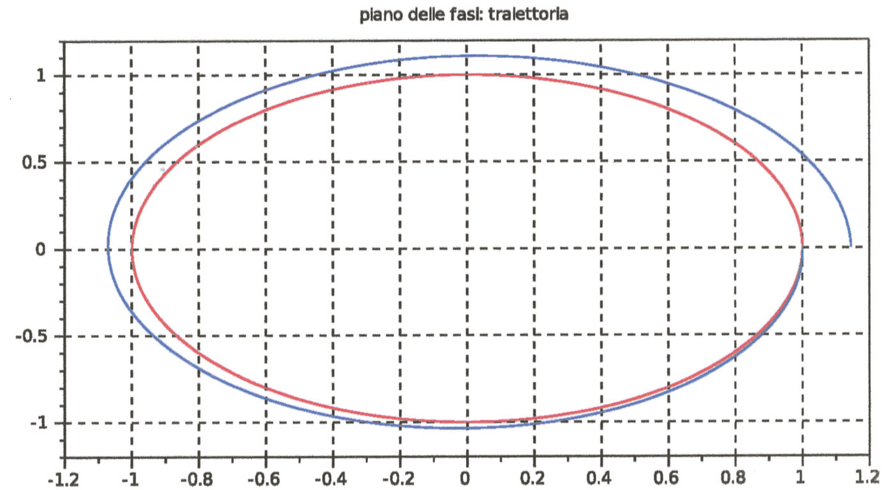
posto $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$ ...

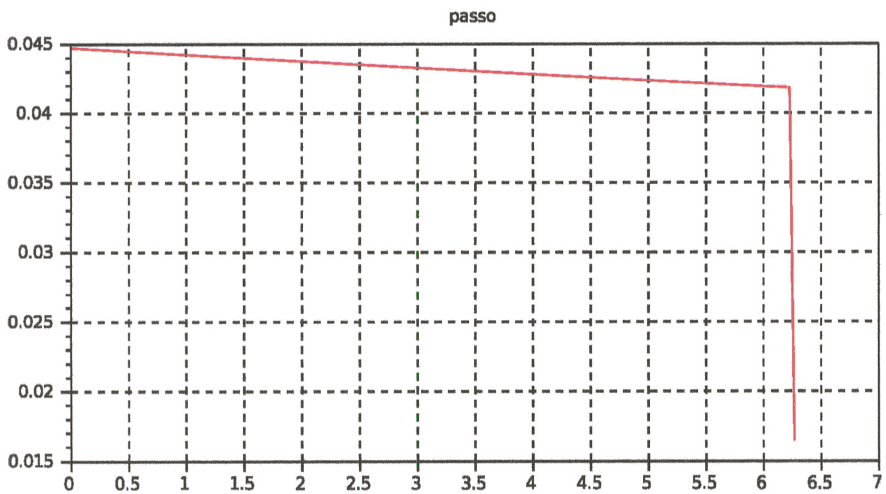
$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} z_1(0) = 1 \\ z_2(0) = 0 \end{matrix}$$

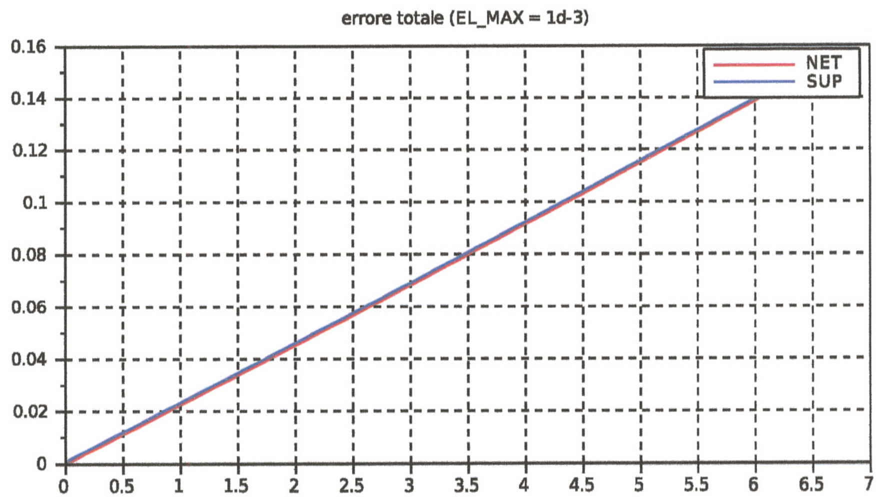
Utilizz la proc con EL_MAX $= 10^{-3}$ e poi EL-MAX $= 10^{-5}$ si ottengono i grafici delle pag seguenti.

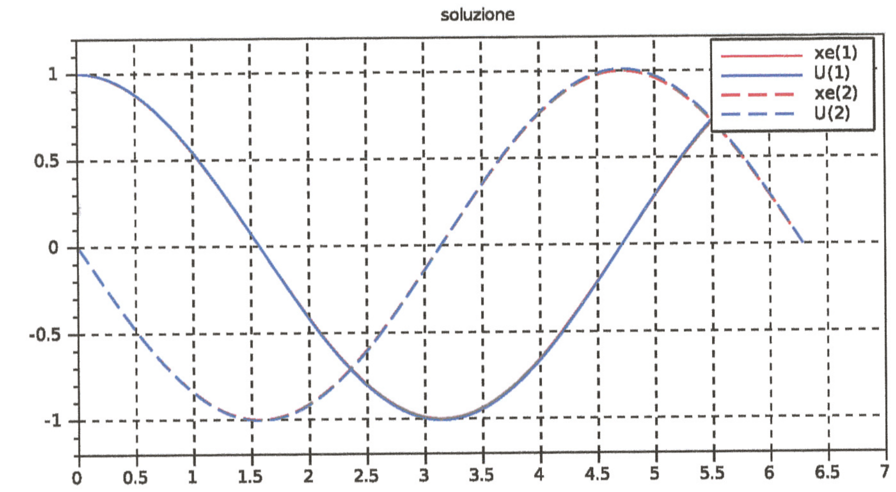
oss: Anche in questo caso si constata la PERDITA di propr qualitative nel passare dalla soluz esatta (periodica) a quella numerica (non periodica).

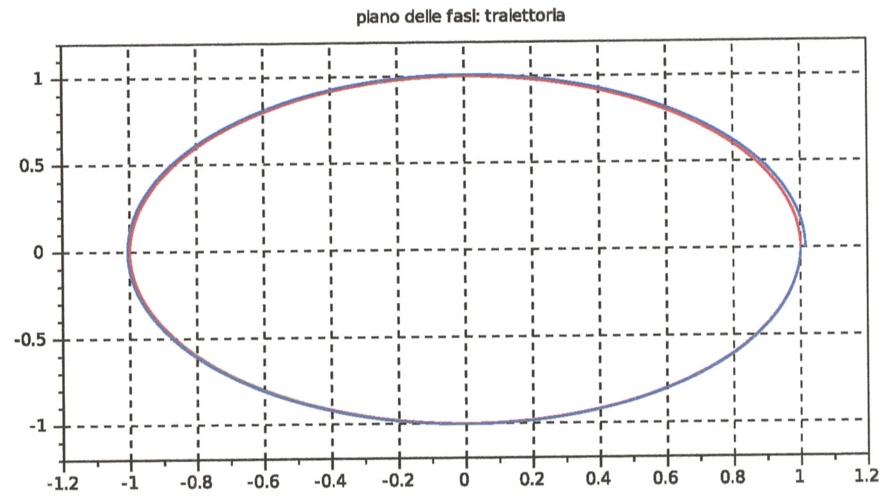

soluzione
xe(1)
U(1)
xe(2)
U(2)

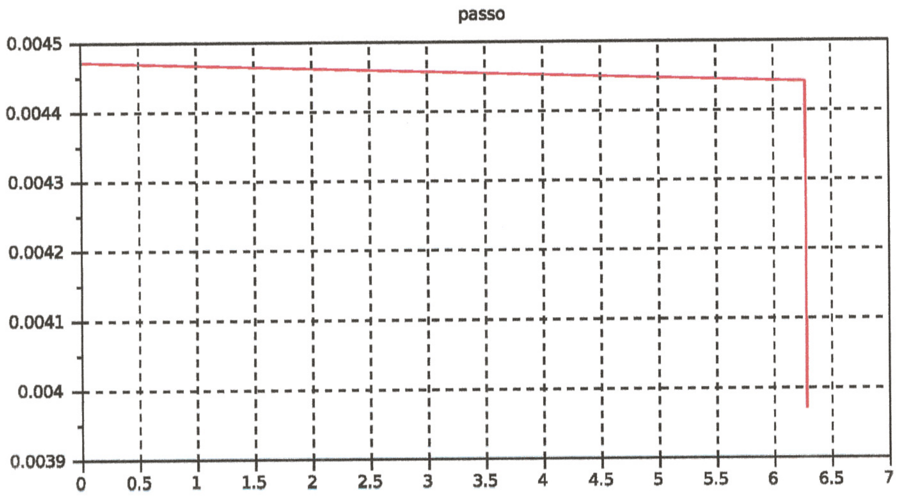

piano delle fasi: traiettoria

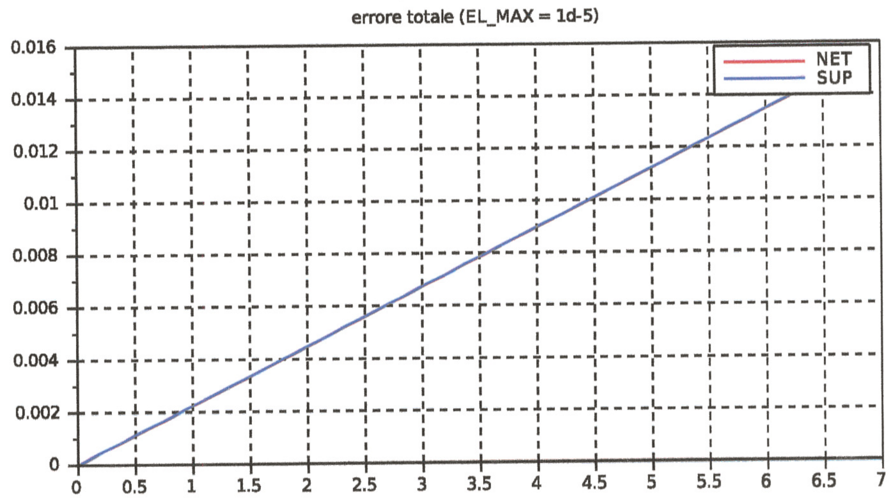

passo


errore totale (EL_MAX = 1d-3)
NET
SUP


soluzione
xe(1)
U(1)
xe(2)
U(2)


piano delle fasi: traiettoria


passo


errore totale (EL_MAX = 1d-5)
NET
SUP