Sia: $\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ il pb di Cauchy in esame, con

- $F(t,x)$ suff regolare da garantire che la soluz

$$z(t) = x(t;\, t_0, x_0) \in C^2$$

## * Metodo di EULERO ESPLICITO * (caso eq. singola)

- (Taylor): $\forall \tau, h \;\exists\, \theta$ t.c.

$$z(\tau+h) = z(\tau) + z'(\tau)h + \frac{1}{2} z''(\theta) h^2$$

con $\theta$ tra $\tau$ e $\tau+h$

- $\tau = t_0$ : $z(t_0+h) = z(t_0) + z'(t_0)h + \frac{1}{2} z''(\theta_0) h^2$

<u>MA</u>: $z(t_0) = x_0$, $z'(t_0) = F(t_0, x_0)$
(perché $z$ è la soluz del Pb di Cauchy ...)

- EULERO: $x_1 = x_0 + F(t_0, x_0)h$

$\Rightarrow$ errore (LOCALE) con passo $h$:

$$x_1 - z(t_0+h) = -\frac{1}{2} z''(\theta_0) h^2$$

- scelgo $h_0$ t.c. $|el_1| = EL_1 = E$

valore $> 0$ scelto dall'utilizz.

MA $z''(\theta_0)$ non è noto. Allora:

$$\boxed{\text{Ip: } z''(t_0) \text{ è una BUONA STIMA di } z''(\theta_0).}$$

$\Rightarrow$ $el_1$ con passo $h \simeq -\frac{1}{2} z''(t_0) h^2$

Oss: $z''(t_0)$ è noto! Siccome $z(t)$ è soluzione...

$$\ldots \quad z''(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, z(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, z(t))\, F(t, z(t))$$

$\Rightarrow z''(t_0) = \ldots$

Q.di: scelgo $h_0$ t.c.

$$EL_1 \simeq \boxed{\frac{1}{2}|z''(t_0)|\, h_0^2 = E}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_0 = \sqrt{\frac{2E}{|z''(t_0)|}}} \qquad (\underline{\text{se}} \;\; z''(t_0) \neq 0 \ldots)$$

- ADESSO: $x_1 = x_0 + F(t_0, x_0)\, h_0$
  $t_1 = t_0 + h_0$

- all'iteraz successiva:

$\tau = t_1$, $\quad z(t_1+h) = z(t_1) + z'(t_1)\,h + \frac{1}{2} z''(\theta_1)\,h^2$

<u>MA</u>: $\quad z(t_1) = x(t_1\,;\, t_1, x_1) = x_1$

$z'(t_1) = F(t_1, x_1)$ perché $z$ è, adesso, la soluz del Pb di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

- EULERO: $\quad x_2 = x_1 + F(t_1, x_1)\,h$

  $\Rightarrow$ errore (LOCALE) con passo $h$:

  $$x_2 - z(t_1+h) = -\frac{1}{2} z''(\theta_1)\,h^2$$

- scelgo $h_1$ t.c. $\quad |el_2| = EL_2 = E$

  ecc...
  $$h_1 = \sqrt{\frac{2E}{|z''(t_1)|}} \qquad (\underline{\text{se}}\ z''(t_1) \neq 0 \ldots)$$

- <u>ADESSO</u>: $\quad x_2 = x_1 + F(t_1, x_1)\,h_1$

  $t_2 = t_1 + h_1$

- In generale: $\quad h_k = \sqrt{\frac{2E}{|z''(t_k)|}} \qquad (\underline{\text{se}}\ z''(t_k) \neq 0 \ldots)$

  poi: $\quad x_{k+1} = x_k + F(t_k, x_k)\,h_k$

  $t_{k+1} = t_k + h_k$

PROBLEMI

(1) Dopo quanti passi si raggiunge $t_f$ ?

(2) Raggiunto $t_f$, quanto sono buone le appross $x_k \simeq x(t_k; t_0, x_0)$ ?

---

(1)
- in generale non si ha garanzia che $t_f$ verrà raggiunto...

- sotto ip minime per l'$\exists!$ della soluz del pb di Cauchy (lipschitzianità di F...) si ha:

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists M > 0 \quad t.c. \ \forall \tau, \xi \\ \text{posto} \quad z(t) = x(t; \tau, \xi) \\ \text{si ha:} \quad |z''(\tau)| \leq M \end{array}}$$

- Allora:
$$h_k = \sqrt{\frac{2E}{|z''(t_k)|}} \geq \sqrt{\frac{2E}{M}} = h_{min}$$

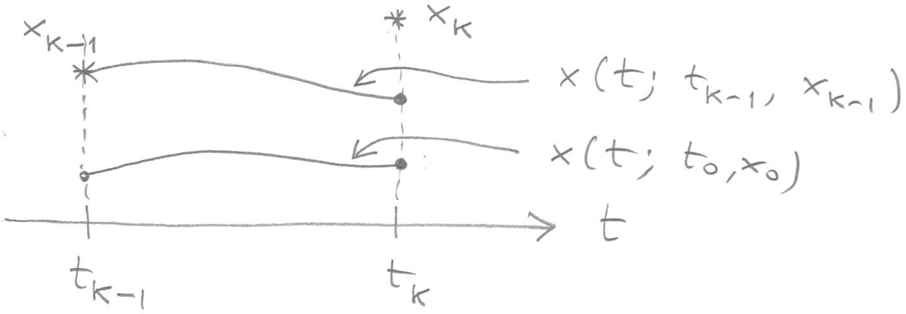
- Ne segue che il NUMERO N di passi per raggiungere $t_f$ è FINITO e:

$$\boxed{N \leq \frac{t_f - t_0}{h_{min}} = (t_f - t_0)\sqrt{\frac{M}{2E}}}$$

• <u>Oss</u>: $\lim_{E \to 0} (t_f - t_0) \sqrt{\dfrac{M}{2E}} = +\infty$.

---

(2) Per l'errore totale si ha:



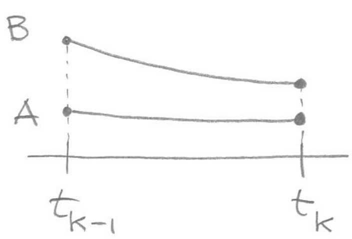

$$et_k = el_k + \varphi(et_{k-1}) \qquad \begin{aligned} &= x(t_k;\, t_{k-1}, x_{k-1}) - \\ &\quad - x(t_k;\, t_0, x_0) \end{aligned}$$

"$et_{k-1}$ trasportato dall'eq diff all'ist $t_k$"

$$\Rightarrow \boxed{ET_k \leq EL_k + \| \varphi(et_{k-1}) \|}$$

• Studio di $\varphi(et_{k-1})$:

<u>Es. 1</u> $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ x(t_{k-1}) = \alpha \end{cases} \Rightarrow x(t;\, t_{k-1}, \alpha) = \alpha\, e^{-(t - t_{k-1})}$




$$|x(t_k;\, t_{k-1}, A) - x(t_k;\, t_{k-1}, B)| = |A - B|\, e^{-h_{k-1}}$$

• $\Rightarrow |\varphi(et_{k-1})| = ET_{k-1}\, e^{-h_{k-1}}$

( <u>Oss</u>: in questo caso $|\varphi(et_{k-1})| < ET_{k-1}$ )

Es. 2 $\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(t_{k-1}) = \alpha \end{cases} \Rightarrow x(t; t_{k-1}, \alpha) =$

$$= \alpha\, e^{(t-t_{k-1})}$$

$$\Rightarrow \quad |\varphi(et_{k-1})| = ET_{k-1}\, e^{h_{k-1}}$$

(Oss: in questo caso $|\varphi(et_{k-1})| > ET_{k-1}$)

- In generale (sotto ip minime...):

$$\boxed{\exists L > 0 \text{ (dip dal Pb di Cauchy) t.c. } \|\varphi(et_{k-1})\| \leq ET_{k-1}\, e^{L h_{k-1}}}$$

- Allora:

$$ET_0 = 0$$

$$ET_1 = EL_1 \simeq E$$

$$\begin{aligned} ET_2 &\leq EL_2 + \|\varphi(et_1)\| \\ &\leq EL_2 + ET_1\, e^{Lh_1} \simeq E(1 + e^{Lh_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ET_3 &\leq EL_3 + \|\varphi(et_2)\| \\ &\leq EL_3 + ET_2\, e^{Lh_2} \leq \\ &\leq EL_3 + EL_2\, e^{Lh_2} + ET_1\, e^{L(h_1+h_2)} \\ &\simeq E(1 + e^{Lh_2} + e^{L(h_1+h_2)}) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$ET_k \leq E\left[1 + e^{Lh_{k-1}} + e^{L(h_{k-1}+h_{k-2})} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + e^{L(h_{k-1}+\dots+h_1)}\right]$$

- <u>MA</u> : $\quad h_{k-1} + \dots + h_1 < t_f - t_0$

$$\Rightarrow \quad e^{L(h_{k-1}+\dots+h_1)} < e^{L(t_f - t_0)}$$

e analogam per tutti gli addendi ...

$$\Rightarrow \quad \boxed{ET_k \leq Ek\, e^{L(t_f - t_0)}}$$

- Infine, $\forall k = 0, \dots, N$ :

$$ET_k \leq EN\, e^{L(t_f - t_0)}$$

e, siccome $\quad N \leq (t_f - t_0)\sqrt{\dfrac{M}{2E}}$ :

$$\boxed{\forall k, \quad ET_k \leq \sqrt{E}\, \underbrace{\left[(t_f - t_0)\sqrt{\frac{M}{2}}\, e^{L(t_f - t_0)}\right]}_{\text{quantità indip da } E}}$$

<u>Oss</u>: $\lim_{E \to 0} \sqrt{E} \left[ \dots \right] = 0$

<u>q. di</u>: per ottenere approx $x_0, \dots, x_N$ con err totale piccolo quanto si vuole basta scegliere $E$ suff piccolo!

(... e avere suff pazienza: più piccolo è $E$ più elevato dobbiamo aspettarci che sia $N$!)

```
function [T, X, PASSO, StimaEL]=LMV_TS_1_pv(x0, t0, tf, fct, fct2, EL_MAX, dialogo)
//
//  Integra numericamente, sull'intervallo [t0,tf], il problema
//  di Cauchy in R(n):
//  .
//  x = F(t,x)
//  x(t0) = x0
//
//  con il metodo TS(1) - Eulero esplicito - a passo variabile, senza iterazione
//  per la scelta del passo.
//
//  x0: condizione iniziale (colonna di n elementi)
//  t0: istante iniziale
//  tf: istante finale
//  fct: function per F - fct(t,x) deve essere una colonna
//  fct2: function il cui valore fct2(t,x) è la derivata seconda in t della
//        soluzione dell'equazione differenziale che all'istante t assume valore x.
//  EL_MAX: errore locale massimo consentito
//  dialogo: se "loquace" mostra gli istanti di integrazione
//
//  T = [T(1),...,T(N)], nodi
//  X: matrice n x N - la colonna X(:,i) è la soluzione numerica
//     all'istante T(i)
//  PASSO: riga con PASSO(k) = h tale che T(k+1) = T(k) + h
//  StimaEL: riga delle stime dell'errore locale
//
//
//
//
n = length(x0); // determina il numero di equazioni del sistema
h_min = (tf - t0)/1d6; // passo minimo consentito
T = [];
X = [];
PASSO = [];
StimaEL = [];
//
T(1,1) = t0;
X(:,1) = x0;
StimaEL(1,1) = 0;
//
// ciclo principale
//
while (T(1,$) < tf) & (PASSO(1,$) > h_min | PASSO(1,$) == []),
         // l'iterazione si arresta se si è raggiunto tf o se il passo
         // necessario per ottenere StimaEL = EL_MAX è inferiore a h_min
    // passo massimo per questa iterazione:
    h_max_loc = tf - T(1,$);
    // determina passo
    Nd2x = norm(fct2(T(1,$),X(:,$)));
    if Nd2x == 0 then
       if PASSO == [] then PASSO(1,$+1) = min(h_min * 100, h_max_loc);
       else PASSO(1,$+1) = min(PASSO(1,$), h_max_loc); end;
    else PASSO(1,$+1) = min(sqrt(2*EL_MAX/Nd2x), h_max_loc);
             // passo per avere StimaEL = EL_MAX (o non superare tf)
    end;
    // calcola nuovo X e T
    X(:,$+1) = X(:,$) + PASSO(1,$)*fct(T(1,$),X(:,$));
    T(1,$+1) = T(1,$) + PASSO(1,$);
    StimaEL(1,$+1) = (1/2) * Nd2x * PASSO(1,$)^2;
    if dialogo == "loquace" then printf("\nT = %3.2e",T($)); end;
end;
if T(1,$) < tf then
   printf("\n\nIntegrazione interrotta a T = %3.2e", T(1,$));
   printf("\n\nh_min = %3.2e , h = %3.2e\n", h_min, PASSO(1,$));
end;
if dialogo == "loquace" then printf("\n"); end;
//
```