* EQUAZIONI DIFFERENZIALI (ordinarie) *

- Forma normale (Pb di Cauchy)

Es: (oscillatore armonico)

Eq. Newton (lungo asse x): $m\ddot{x} = -kx$

$\sim \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$ EQ del SECONDO ordine (cond iniz: $x(0), \dot{x}(0) \dots$)

Forma normale: SISTEMA di DUE eq del PRIMO ord:

$x_1 = x \ , \ x_2 = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 \end{cases}$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

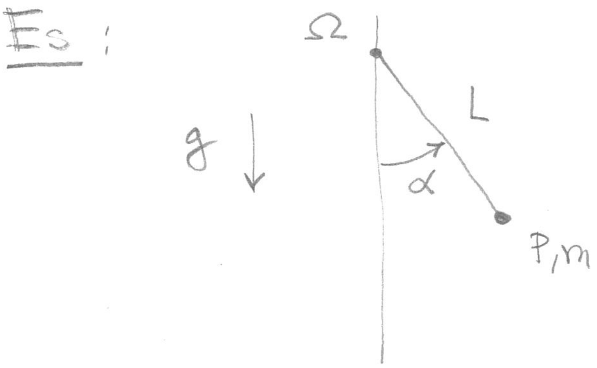
- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Pb di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \\ \underbrace{x(t_0) = x_0}_{\text{CONDIZIONI INIZIALI}} \end{cases}$, $t \in [t_0, t_f]$

- $\boxed{\text{SOLUZIONE}}$: $x : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$, derivabile, che $\forall t \in [t_0, t_f]$ verifica l'eq Ⓔ $x(t_0) = x_0$

NOTAZIONE: $x(t; x_0, t_0)$

Es:



Eq. del moto:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0$$

forma normale...

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_2 &= \dot{\alpha} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,x_1 \end{aligned}$$

$$F(t, x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,x_1 \end{bmatrix}$$

Il pb di Cauchy $\begin{cases} \ddot{\alpha} = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \alpha(0) = \alpha_0, \ \dot{\alpha}(0) = \alpha_0 \end{cases}$ è <u>EQUIVALENTE</u>

al pb di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = F(t, x) \\ x(0) = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \dot{\alpha}_0 \end{bmatrix} \end{cases}$ nel senso che:

ad ogni soluz del primo corrisp una soluz del secondo e viceversa.

• Ip: $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists!$ soluzione del Pb ...

• un METODO NUMERICO per l'APPROSSIMAZIONE della soluz del Pb di Cauchy ...

... costruisca valori $\boxed{x_0, x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n}$

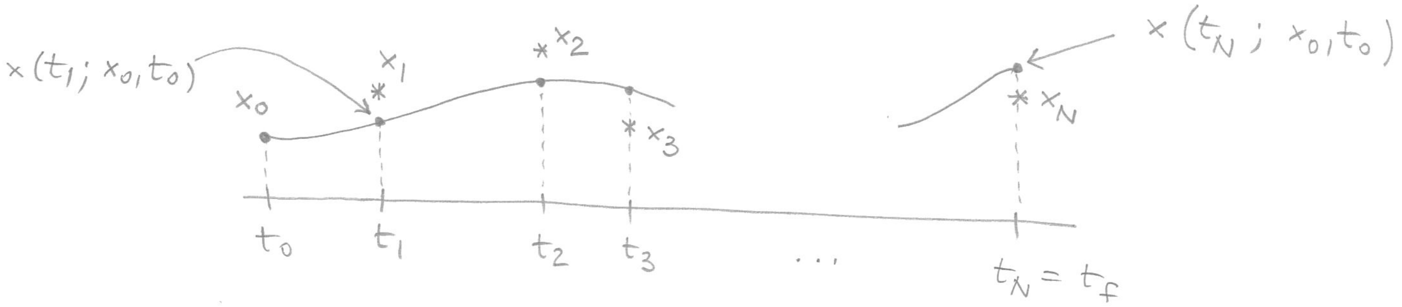
da utilizz come approssimazioni di

$$x(t_0; x_0, t_0),\ x(t_1; x_0, t_0), \dots,\ x(t_f; x_0, t_0)$$

<u>OVVERO</u> come approssimaz dei valori della soluz $x(t; x_0, t_0)$ agli istanti

$$\boxed{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N = t_f}$$

Il numero $\boxed{h_k = t_{k+1} - t_k}$ si chiama <u>PASSO</u> di INTEGRAZIONE all'istante t_k.



<u>PROCEDURA</u>:

<u>dati</u>: x_0, t_0, t_f, F

<u>uscita</u>: $x_0, \dots, x_N$; $t_0, \dots, t_N$

• $k = 0$;

• <u>finché</u> $t_k < t_f$ <u>ripeti</u>:

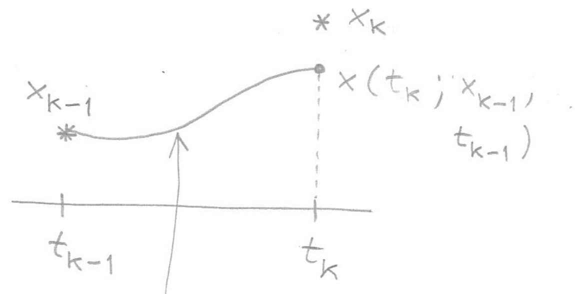
  • SCEGLI h_k

- CALCOLA x_{k+1}
- $t_{k+1} = t_k + h_k$
- $k = k+1$

<u>Oss</u> : la procedura SCEGLIE h_k per "controllare l'errore" come RICHIESTO dall'UTILIZZATORE. Tra i <u>dati</u> della procedura compare (in modo esplicito o no) un "errore massimo consentito";

la procedura CALCOLA x_{k+1} utilizz le info note all'ist t_k, in particolare $x_0, x_1, \dots, x_k$.

<u>def</u> (ERRORE LOCALE)



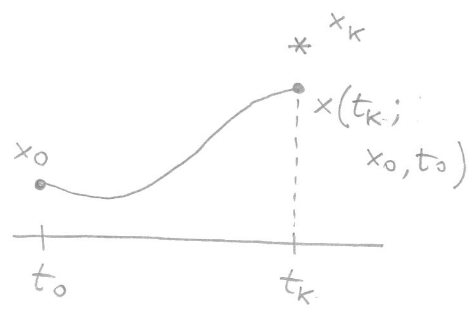
$$el_k = x_k - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1})$$

misura di quanto "sbaglia" la procedura nel "seguire" la soluz esatta che passa per $(t_{k-1}; x_{k-1})$

sol del Pb di C:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_{k-1}) = x_{k-1} \end{cases}$$

$$EL_k = \| el_k \| = \| x_k - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) \|$$

<u>def</u> (ERRORE TOTALE)



$$et_k = x_k - x(t_k; x_0, t_0)$$

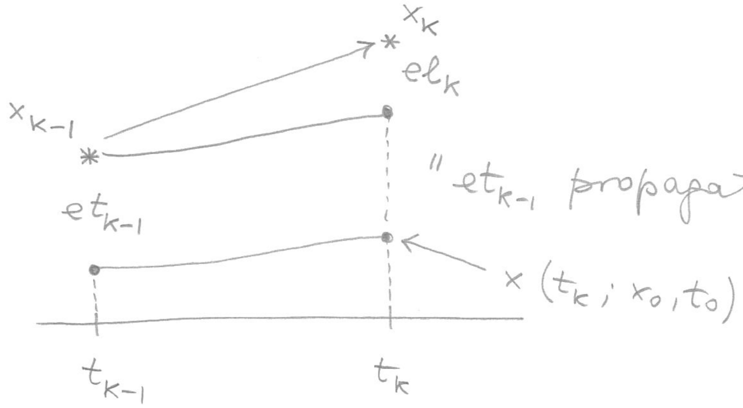
$$ET_k = \| et_k \|$$

Oss: (1)

$$ET_k = \| x_k - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) +$$

$$+ \; x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) - x(t_k; x_0, t_0) \|$$

$$\leq EL_k + \underbrace{\| x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) - x(t_k; x_0, t_0) \|}_{\text{"et_{k-1} propagato all'ist t_k"}}$$



(2) la procedura "controlla" l'ERRORE LOCALE, quindi quello totale solo indirettamente!

L'intento della procedura al passo k è quello di rendere x_{k+1} una buona approx di $x(t_{k+1}; x_k, t_k)$.

Sia: $\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ il pb di Cauchy in esame, con

- $F(t,x)$ suff regolare da garantire che la soluz

$$z(t) = x(t; t_0, x_0) \in C^2$$

---

* Metodo di EULERO ESPLICITO * (caso eq. singola)

- (Taylor): $\forall \tau, h \; \exists \theta$ t.c.

$$z(\tau+h) = z(\tau) + z'(\tau) h + \frac{1}{2} z''(\theta) h^2$$

con θ tra τ e $\tau+h$

- $\tau = t_0$: $z(t_0+h) = z(t_0) + z'(t_0) h + \frac{1}{2} z''(\theta_0) h^2$

<u>MA</u>: $z(t_0) = x_0$, $z'(t_0) = F(t_0, x_0)$
(perché z è la soluz del Pb di Cauchy ...)

- EULERO: $x_1 = x_0 + F(t_0, x_0) h$

$\Rightarrow$ errore (LOCALE) con passo h:

$$x_1 - z(t_0+h) = -\frac{1}{2} z''(\theta_0) h^2$$

• scelgo h_0 t.c. $|el_1| = EL_1 = E$

valore > 0 scelto dall'utilizz.

<u>MA</u> $z''(\theta_0)$ non è noto. Allora:

<u>Ip</u>: $z''(t_0)$ è una BUONA STIMA di $z''(\theta_0)$.

$\Rightarrow$ el_1 con passo $h \simeq -\frac{1}{2} z''(t_0) h^2$

<u>Oss</u>: $z''(t_0)$ è noto! Siccome $z(t)$ è soluzione...

$$\ldots \quad z''(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, z(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, z(t)) F(t, z(t))$$

$$\Rightarrow z''(t_0) = \ldots$$

Q.di: scelgo h_0 t.c.

$$EL_1 \simeq \boxed{\frac{1}{2} |z''(t_0)| h_0^2 = E}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_0 = \sqrt{\frac{2E}{|z''(t_0)|}}} \qquad (\underline{se} \ z''(t_0) \neq 0 \ldots)$$

• <u>ADESSO</u>: $x_1 = x_0 + F(t_0, x_0) h_0$

$t_1 = t_0 + h_0$